# 1 Operátor a jeho funkce, komutátor

### Funkce operátoru

Uvedeme dvě možnosti, jak zavést funkci operátoru $\hat{\mathsf{A}}$ na základě funkce reálného argumentu $f(\xi)$.

1. *Rozvojem do řady:* Předpokládejme, že existuje rozvoj funkce $f(\xi)$ do mocninné řady v okolí bodu $\xi = 0$ *(Maclaurinova řada)*:

$$f(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \xi^n \,, \qquad a_n = \frac{1}{n!} \left. \frac{\mathrm{d} f^n(\xi)}{\mathrm{d}\xi^n} \right|_{\xi=0} . \tag{1.0.1}$$

Pak se pod funkcí $f(\hat{\mathsf{A}})$ rozumí operátor

$$f(\hat{\mathsf{A}}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \hat{\mathsf{A}}^n \,. \tag{1.0.2}$$

***Příklad:***

$$\boxed{\mathrm{e}^{\hat{\mathsf{A}}} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hat{\mathsf{A}}^n}{n!}} \tag{1.0.3}$$

2. *Sylvestrova formule:* Předpokládejme, že operátor $\hat{\mathsf{A}}$ je samosdružený a známe jeho spektrální rozklad

$$\hat{\mathsf{A}} = \sum_k A_k \hat{\mathsf{P}}_k \,, \tag{1.0.4}$$

kde $\hat{\mathsf{P}}_k = |A_k\rangle \langle A_k|$ je projektor na podprostor příslušející reálné nedegenerované vlastní hodnotě $A_k$. Je-li funkce $f(\xi)$ analytická v bodech $\xi = A_k$, lze funkci operátoru $A$ vyjádřit jako

$$f(\hat{\mathsf{A}}) = \sum_k f(A_k) \hat{\mathsf{P}}_k \,. \tag{1.0.5}$$

### Komutátor

Komutátor dvou operátorů $\hat{\mathsf{A}}$ a $\hat{\mathsf{B}}$ se definuje jako

$$\left[\hat{\mathsf{A}}, \hat{\mathsf{B}}\right] \equiv \hat{\mathsf{A}}\hat{\mathsf{B}} - \hat{\mathsf{B}}\hat{\mathsf{A}} \tag{1.0.6}$$

a splňuje mimo jiné tyto vlastnosti:

1. *Antisymetrie*

$$\left[\hat{\mathsf{A}}, \hat{\mathsf{B}}\right] = -\left[\hat{\mathsf{B}}, \hat{\mathsf{A}}\right] \tag{1.0.7}$$

2. *Jacobiho identita*

$$\left[\hat{\mathsf{A}}, \left[\hat{\mathsf{B}}, \hat{\mathsf{C}}\right]\right] + \left[\hat{\mathsf{B}}, \left[\hat{\mathsf{C}}, \hat{\mathsf{A}}\right]\right] + \left[\hat{\mathsf{C}}, \left[\hat{\mathsf{A}}, \hat{\mathsf{B}}\right]\right] = 0 \,. \tag{1.0.8}$$

## 1.1 Komutátor součinu

Pomocí jednoduchých komutátorů vyjádřete komutátor

$$\left[\hat{A}\hat{B},\hat{C}\right] . \tag{1.1.1}$$

**Řešení:**

Komutátor rozepíšeme podle definice (1.0.6). Poté k němu přičteme a odečteme vhodně zvolený člen:

$$\begin{aligned}\left[\hat{A}\hat{B},\hat{C}\right] &= \hat{A}\hat{B}\hat{C} - \hat{C}\hat{A}\hat{B} + \underbrace{\hat{A}\hat{C}\hat{B} - \hat{A}\hat{C}\hat{B}}_{=0} \\ &= \hat{A}\left(\hat{B}\hat{C} - \hat{C}\hat{B}\right) + \left(\hat{A}\hat{C} - \hat{C}\hat{A}\right)\hat{B} \\ &= \hat{A}\left[\hat{B},\hat{C}\right] + \left[\hat{A},\hat{C}\right]\hat{B} .\end{aligned} \tag{1.1.2}$$

Podobně bychom ukázali, že

$$\left[\hat{A},\hat{B}\hat{C}\right] = \left[\hat{A},\hat{B}\right]\hat{C} + \hat{B}\left[\hat{A},\hat{C}\right] \tag{1.1.3}$$

a pro čtyři operátory

$$\begin{aligned}\left[\hat{A}\hat{B},\hat{C}\hat{D}\right] &= \hat{A}\left[\hat{B},\hat{C}\right]\hat{D} + \hat{A}\hat{C}\left[\hat{B},\hat{D}\right] + \left[\hat{A},\hat{C}\right]\hat{D}\hat{B} + \hat{C}\left[\hat{A},\hat{D}\right]\hat{B} \\ &= \hat{A}\left[\hat{B},\hat{C}\right]\hat{D} + \hat{C}\hat{A}\left[\hat{B},\hat{D}\right] + \left[\hat{A},\hat{C}\right]\hat{B}\hat{D} + \hat{C}\left[\hat{A},\hat{D}\right]\hat{B} .\end{aligned} \tag{1.1.4}$$

## 1.2 Komutátor inverzního operátoru

Vyjádřete komutátor $\left[\hat{A},\hat{B}^{-1}\right]$ pomocí komutátoru $\left[\hat{A},\hat{B}\right]$.

**Řešení:**

Využijeme skutečnosti, že

$$\left[\hat{A},\hat{B}\hat{B}^{-1}\right] = \left[\hat{A},\hat{1}\right] = 0 , \tag{1.2.1}$$

a rozvineme tento komutátor pomocí formule (1.1.3) z předchozího příkladu:

$$\left[\hat{A},\hat{B}\hat{B}^{-1}\right] = \left[\hat{A},\hat{B}\right]\hat{B}^{-1} + \hat{B}\left[\hat{A},\hat{B}^{-1}\right] . \tag{1.2.2}$$

Dostaneme tedy

$$\left[\hat{A},\hat{B}^{-1}\right] = -\hat{B}^{-1}\left[\hat{A},\hat{B}\right]\hat{B}^{-1} . \tag{1.2.3}$$

Dalším přirozeným krokem je ukázat, že

$$\left[\hat{A}^{-1},\hat{B}^{-1}\right] = \hat{A}^{-1}\hat{B}^{-1}\left[\hat{A},\hat{B}\right]\hat{B}^{-1}\hat{A}^{-1} \tag{1.2.4}$$

(o platnosti tohoto vztahu se lze přesvědčit i prostým roznásobením).

## 1.3 Operátor souřadnice a hybnosti

Jsou dány dva samosdružené operátory $\hat{\mathsf{x}}$, $\hat{\mathsf{p}}$ (souřadnice a hybnost), které splňují komutační relaci $[\hat{\mathsf{x}}, \hat{\mathsf{p}}] = \mathrm{i}\hbar$.

1. Určete $[\hat{\mathsf{x}}^2, \hat{\mathsf{p}}]$.
2. Určete $[\hat{\mathsf{x}}^n, \hat{\mathsf{p}}]$.
3. Určete $[f(\hat{\mathsf{x}}), \hat{\mathsf{p}}]$ a $[\hat{\mathsf{x}}, g(\hat{\mathsf{p}})]$.

**Řešení:**

1. Vyřešíme přímočarým použitím vzorce (1.1.2):
$$\left[\hat{\mathsf{x}}^2, \hat{\mathsf{p}}\right] = [\hat{\mathsf{x}}\hat{\mathsf{x}}, \hat{\mathsf{p}}] = \hat{\mathsf{x}}\,[\hat{\mathsf{x}}, \hat{\mathsf{p}}] + [\hat{\mathsf{x}}, \hat{\mathsf{p}}]\,\hat{\mathsf{x}} = 2\mathrm{i}\hbar\hat{\mathsf{x}}\,. \tag{1.3.1}$$
2. Opakujeme proceduru z předchozího bodu. Dostaneme
$$[\hat{\mathsf{x}}^n, \hat{\mathsf{p}}] = n\mathrm{i}\hbar\hat{\mathsf{x}}^{n-1}\,. \tag{1.3.2}$$
Platnost tohoto vztahu lze formálně dokázat matematickou indukcí.
3. Využijeme definice funkce operátoru (1.0.2):
$$\begin{aligned}[f(\hat{\mathsf{x}}), \hat{\mathsf{p}}] &= \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\hat{\mathsf{x}}^n, \hat{\mathsf{p}}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,[\hat{\mathsf{x}}^n, \hat{\mathsf{p}}] \\ &= \mathrm{i}\hbar\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} n\hat{\mathsf{x}}^{n-1} = |m = n-1| \\ &= \mathrm{i}\hbar\sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(m+1)}(0)}{m!}\hat{\mathsf{x}}^m = \mathrm{i}\hbar f'(\hat{\mathsf{x}})\,. \end{aligned}\tag{1.3.3}$$
(pod derivací funkce operátoru rozumíme $f^{(n)}(\hat{\mathsf{x}}) = \mathrm{d}f^n(\xi)/\mathrm{d}\xi^n|_{\xi=\hat{\mathsf{x}}}$).
Analogickým postupem dostaneme
$$[\hat{\mathsf{x}}, f(\hat{\mathsf{p}})] = \mathrm{i}\hbar f'(\hat{\mathsf{p}})\,. \tag{1.3.4}$$

## 1.4 Exponenciála operátorů

1. Jsou-li $\hat{\mathsf{A}}$, $\hat{\mathsf{B}}$ dva komutující operátory, $\left[\hat{\mathsf{A}}, \hat{\mathsf{B}}\right] = 0$, dokažte, že
$$\mathrm{e}^{\hat{\mathsf{A}}+\hat{\mathsf{B}}} = \mathrm{e}^{\hat{\mathsf{A}}}\,\mathrm{e}^{\hat{\mathsf{B}}} = \mathrm{e}^{\hat{\mathsf{B}}}\,\mathrm{e}^{\hat{\mathsf{A}}}\,. \tag{1.4.1}$$
2. Pro obecné nekomutující operátory $\hat{\mathsf{A}}$, $\hat{\mathsf{B}}$ ukažte, že platí:
$$\mathrm{e}^{\hat{\mathsf{A}}}\;\hat{\mathsf{B}}\;\mathrm{e}^{-\hat{\mathsf{A}}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\hat{\mathsf{K}}_n}{n!}, \tag{1.4.2}$$
kde $\hat{\mathsf{K}}_0 = \hat{\mathsf{B}}$ a $\hat{\mathsf{K}}_{n+1} = \left[\hat{\mathsf{A}}, \hat{\mathsf{K}}_n\right]$.
*Poznámka:* Tento vztah se někdy nazývá *Baker-Campbell-Hausdorffova (BCH) nebo Hausdorffova formule.*

3. Dokažte, že pro libovolné nekomutující operátory $\hat{\mathsf{B}}$, $\hat{\mathsf{C}}$ platí:

$$\mathrm{e}^{\hat{\mathsf{C}}\hat{\mathsf{B}}\hat{\mathsf{C}}^{-1}} = \hat{\mathsf{C}}\,\mathrm{e}^{\hat{\mathsf{B}}}\,\hat{\mathsf{C}}^{-1}\,. \tag{1.4.3}$$

Použitím posledního vztahu lze přepsat rovnici (1.4.2) do jiného, také často užívaného tvaru

$$\mathrm{e}^{\hat{\mathsf{A}}}\,\mathrm{e}^{\hat{\mathsf{B}}}\,\mathrm{e}^{-\hat{\mathsf{A}}} = \mathrm{e}^{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\hat{\mathsf{K}}_n}{n!}}\,. \tag{1.4.4}$$

**Řešení:**

1. Vyjdeme z rozvoje exponenciály operátoru (1.0.3):

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{\hat{\mathsf{A}}+\hat{\mathsf{B}}} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\hat{\mathsf{A}}+\hat{\mathsf{B}}\right)^n = \left|\begin{array}{c}\text{binomický}\\ \text{rozvoj}\end{array}\right| \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{1}{n!}\underbrace{\binom{n}{m}}_{\frac{n!}{m!(n-m)!}}\hat{\mathsf{A}}^m\hat{\mathsf{B}}^{n-m} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{\hat{\mathsf{A}}^m}{m!}\frac{\hat{\mathsf{B}}^{n-m}}{(n-m)!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\hat{\mathsf{A}}^k}{k!}\frac{\hat{\mathsf{B}}^l}{l!} = \left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\hat{\mathsf{A}}^k}{k!}\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\hat{\mathsf{B}}^l}{l!}\right) = \mathrm{e}^{\hat{\mathsf{A}}}\,\mathrm{e}^{\hat{\mathsf{B}}}\,.
\end{aligned}$$

Komutativitu operátorů $\hat{\mathsf{A}}$ a $\hat{\mathsf{B}}$ jsme využili v binomickém rozvoji.

2. Označíme $f(\xi) = \mathrm{e}^{\xi\hat{\mathsf{A}}}\,\hat{\mathsf{B}}\,\mathrm{e}^{-\xi\hat{\mathsf{A}}}$. Levá strana BCH formule je pak rovna $f(1)$. Funkci $f(\xi)$ rozvineme do mocninné řady dané pravou stranou BCH formule, přičemž pro její koeficienty dostaneme

$$\begin{aligned}
\hat{\mathsf{K}}_0 &= f(0) = \hat{\mathsf{B}} \\
\hat{\mathsf{K}}_1 &= f'(0) = \left\{\left(\mathrm{e}^{\xi\hat{\mathsf{A}}}\,\hat{\mathsf{A}}\right)\hat{\mathsf{B}}\,\mathrm{e}^{-\xi\hat{\mathsf{A}}} + \mathrm{e}^{\xi\hat{\mathsf{A}}}\,\hat{\mathsf{B}}\left(-\hat{\mathsf{A}}\,\mathrm{e}^{-\xi\hat{\mathsf{A}}}\right)\right\}_{\xi=0} = \left\{\mathrm{e}^{\xi\hat{\mathsf{A}}}\left[\hat{\mathsf{A}},\hat{\mathsf{B}}\right]\mathrm{e}^{-\xi\hat{\mathsf{A}}}\right\}_{\xi=0} \\
&= \left[\hat{\mathsf{A}},\hat{\mathsf{B}}\right] = \left[\hat{\mathsf{A}},\hat{\mathsf{K}}_0\right] \\
\hat{\mathsf{K}}_2 &= f''(0) = \left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\,\mathrm{e}^{\xi\hat{\mathsf{A}}}\left[\hat{\mathsf{A}},\hat{\mathsf{B}}\right]\mathrm{e}^{-\xi\hat{\mathsf{A}}}\right\}_{\xi=0} \\
&= \left\{\left(\mathrm{e}^{\xi\hat{\mathsf{A}}}\,\hat{\mathsf{A}}\right)\left[\hat{\mathsf{A}},\hat{\mathsf{B}}\right]\mathrm{e}^{-\xi\hat{\mathsf{A}}} + \mathrm{e}^{\xi\hat{\mathsf{A}}}\left[\hat{\mathsf{A}},\hat{\mathsf{B}}\right]\left(-\hat{\mathsf{A}}\,\mathrm{e}^{-\xi\hat{\mathsf{A}}}\right)\right\}_{\xi=0} \\
&= \left[\hat{\mathsf{A}},\left[\hat{\mathsf{A}},\hat{\mathsf{B}}\right]\right] = \left[\hat{\mathsf{A}},\hat{\mathsf{K}}_1\right] \\
&\ \ \vdots
\end{aligned} \tag{1.4.5}$$

3. Opět budeme postupovat tak, že levou stranu výrazu (1.4.3) rozvineme do řady podle vztahu (1.0.3):

$$\mathrm{e}^{\hat{\mathsf{C}}\hat{\mathsf{B}}\hat{\mathsf{C}}^{-1}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\hat{\mathsf{C}}\hat{\mathsf{B}}\hat{\mathsf{C}}^{-1}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\hat{\mathsf{C}}\hat{\mathsf{B}}^n\hat{\mathsf{C}}^{-1} = \hat{\mathsf{C}}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\hat{\mathsf{B}}^n\right)\hat{\mathsf{C}}^{-1} = \hat{\mathsf{C}}\,\mathrm{e}^{\hat{\mathsf{B}}}\,\hat{\mathsf{C}}^{-1}\,.$$

Rovnici (1.4.4) dostaneme z (1.4.2), přiřadíme-li $\hat{\mathsf{C}} \equiv \mathrm{e}^{\hat{\mathsf{A}}}$.

## 1.5 Posunutí souřadnice

Jsou dány dva samosdružené operátory $\hat{\mathsf{x}}$, $\hat{\mathsf{p}}$ (souřadnice a hybnost), které splňují komutační relaci $[\hat{\mathsf{x}}, \hat{\mathsf{p}}] = \mathrm{i}\hbar$, a operátor

$$\hat{\mathsf{T}}(a) = \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar} a \hat{\mathsf{p}}}, \tag{1.5.1}$$

kde $a$ je libovolné reálné číslo.

1. Ukažte, že operátor $\hat{\mathsf{T}}(a)$ je unitární.
2. Nalezněte, čemu se rovná $\hat{\mathsf{T}}^{-1}(a)\,\hat{\mathsf{x}}\,\hat{\mathsf{T}}(a)$.
3. Spočítejte $\hat{\mathsf{T}}(a)\psi(x)$, kde $\psi(x) \equiv \langle x|\psi\rangle$ je vlnová funkce.

**Řešení:**

1. Unitární operátor musí splňovat rovnost

$$\hat{\mathsf{T}}^{\dagger}(a)\hat{\mathsf{T}}(a) = \hat{\mathsf{T}}(a)\hat{\mathsf{T}}^{\dagger}(a) = \hat{\mathsf{1}}\,. \tag{1.5.2}$$

Dosadíme vyjádření (1.5.1):

$$\left(\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar} a \hat{\mathsf{p}}}\right)^{\dagger} \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar} a \hat{\mathsf{p}}} = \mathrm{e}^{+\frac{\mathrm{i}}{\hbar} a \hat{\mathsf{p}}^{\dagger}}\, \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar} a \hat{\mathsf{p}}} = \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar} a (\hat{\mathsf{p}} - \hat{\mathsf{p}})} = \mathrm{e}^{\hat{\mathsf{0}}} = \hat{\mathsf{1}} \tag{1.5.3}$$

(postupně jsme využili samosdruženosti operátoru $\hat{\mathsf{p}}$ a vztahu (1.4.1)).

Stejným způsobem se přímočaře ukáže, že

$$\boxed{\begin{aligned} \hat{\mathsf{T}}^{-1}(a) = \hat{\mathsf{T}}^{\dagger}(a) &= \hat{\mathsf{T}}(-a) \\ \hat{\mathsf{T}}(a)\hat{\mathsf{T}}(b) &= \hat{\mathsf{T}}(a+b) \end{aligned}}\,. \tag{1.5.4}$$

2. Vyjdeme z rozvoje BCH formule (1.4.2). V našem případě je

$$\hat{\mathsf{A}} \equiv \frac{\mathrm{i}}{\hbar} a \hat{\mathsf{p}}\,, \qquad \hat{\mathsf{B}} \equiv \hat{\mathsf{x}}\,,$$

takže

$$\begin{aligned} \hat{\mathsf{K}}_0 &= \hat{\mathsf{x}} \\ \hat{\mathsf{K}}_1 &= \left[\frac{\mathrm{i}}{\hbar} a \hat{\mathsf{p}}, \hat{\mathsf{x}}\right] = \frac{\mathrm{i}}{\hbar} a \,(-\mathrm{i}\hbar) = a \\ \hat{\mathsf{K}}_2 &= \hat{\mathsf{K}}_3 = \cdots = 0\,. \end{aligned}$$

Výsledek tedy zní

$$\boxed{\hat{\mathsf{T}}^{-1}(a)\,\hat{\mathsf{x}}\,\hat{\mathsf{T}}(a) = \hat{\mathsf{x}} + a}\,. \tag{1.5.5}$$

3. Víme, že platí $\hat{\mathsf{x}}\,|x\rangle = x\,|x\rangle$. Hledejme neprve, čemu je rovno $\hat{\mathsf{x}}\hat{\mathsf{T}}(a)\,|x\rangle$. Vyjdeme z výsledku předchozího bodu:

$$\hat{\mathsf{x}}\hat{\mathsf{T}}(a)\,|x\rangle = \hat{\mathsf{T}}(a)\,(\hat{\mathsf{x}} + a)\,|x\rangle = \hat{\mathsf{T}}(a)\,(x+a)\,|x\rangle = (x+a)\,\hat{\mathsf{T}}(a)\,|x\rangle\ . \tag{1.5.6}$$

Stav $\hat{\mathsf{T}}(a)\,|x\rangle$ tedy přísluší vlastní hodnotě $x+a$ operátoru $\hat{\mathsf{x}}$, označíme ho proto

$$\boxed{|x+a\rangle \equiv \hat{\mathsf{T}}(a)\,|x\rangle} \,. \tag{1.5.7}$$

Obdobně

$$\langle x-a| = \langle x|\,\hat{\mathsf{T}}^\dagger(-a) = \langle x|\,\hat{\mathsf{T}}(a)\,. \tag{1.5.8}$$

Z posledních dvou vztahů plyne

$$\hat{\mathsf{T}}(a)\psi(x) = \left\langle x\middle|\hat{\mathsf{T}}(a)\psi\right\rangle = \langle x-a|\psi\rangle = \psi(x-a)\,. \tag{1.5.9}$$

*Poznámka:* Operátor $\hat{\mathsf{T}}(a)$ se nazývá *operátor posunutí.*

## 1.6 Rotace operátoru spinu

Jsou dány samosdružené operátory $\hat{\mathsf{S}}_1, \hat{\mathsf{S}}_2, \hat{\mathsf{S}}_3$, které splňují komutační relace pro moment hybnosti,

$$\left[\hat{\mathsf{S}}_j, \hat{\mathsf{S}}_k\right] = \mathrm{i}\hbar\epsilon_{jkl}\hat{\mathsf{S}}_l\,, \tag{1.6.1}$$

a operátor

$$\hat{\mathsf{R}}_3(\phi) = \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\phi\hat{\mathsf{S}}_3}\,, \tag{1.6.2}$$

s reálným parametrem $\phi$. Ukažte, čemu se rovnají výrazy

$$\hat{\mathsf{R}}_3^{-1}(\phi)\hat{\mathsf{S}}_1\hat{\mathsf{R}}_3(\phi)\,, \qquad \hat{\mathsf{R}}_3^{-1}(\phi)\hat{\mathsf{S}}_2\hat{\mathsf{R}}_3(\phi)\,.$$

**Řešení:**

Budeme počítat první z hledaných výrazů. Stejně jako v předchozím příkladu vyjdeme z BCH formule (1.4.2), do které nyní dosadíme

$$\hat{\mathsf{A}} \equiv \frac{\mathrm{i}}{\hbar}\phi\hat{\mathsf{S}}_3\,, \qquad \hat{\mathsf{B}} \equiv S_1\,.$$

Dostaneme (s využitím komutačních relací)

$$\begin{aligned}
\hat{\mathsf{K}}_0 &= \hat{\mathsf{S}}_1\,,\\
\hat{\mathsf{K}}_1 &= \left[\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\phi\hat{\mathsf{S}}_3, \hat{\mathsf{S}}_1\right] = \frac{\mathrm{i}}{\hbar}\phi\left[\hat{\mathsf{S}}_3, \hat{\mathsf{S}}_1\right] = -\phi\hat{\mathsf{S}}_2\,,\\
\hat{\mathsf{K}}_2 &= \left[\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\phi\hat{\mathsf{S}}_3, -\phi\hat{\mathsf{S}}_2\right] = -\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\phi^2\left[\hat{\mathsf{S}}_3, \hat{\mathsf{S}}_2\right] = -\phi^2\hat{\mathsf{S}}_1\,,\\
\hat{\mathsf{K}}_3 &= \left[\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\phi\hat{\mathsf{S}}_3, -\phi^2\hat{\mathsf{S}}_1\right] = -\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\phi^3\left[\hat{\mathsf{S}}_3, \hat{\mathsf{S}}_1\right] = \phi^3\hat{\mathsf{S}}_2\,,\\
&\vdots
\end{aligned}$$

což dosadíme do řady (1.4.2), kterou následně sečteme:

$$\begin{aligned}
\hat{\mathsf{R}}_3^{-1}(\phi)\hat{\mathsf{S}}_1\hat{\mathsf{R}}_3(\phi) &= \frac{1}{0!}\hat{\mathsf{S}}_1 - \frac{1}{1!}\phi\hat{\mathsf{S}}_2 - \frac{1}{2!}\phi^2\hat{\mathsf{S}}_1 + \frac{1}{3!}\phi^3\hat{\mathsf{S}}_2 + \cdots\\
&= \underbrace{\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}\phi^{2k}\right]}_{\cos\phi}\hat{\mathsf{S}}_1 - \underbrace{\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\phi^{2k+1}\right]}_{\sin\phi}\hat{\mathsf{S}}_2\\
&= \boxed{\hat{\mathsf{S}}_1\cos\phi - \hat{\mathsf{S}}_2\sin\phi}\,.
\end{aligned} \tag{1.6.3}$$

Analogicky pro druhý vztah:

$$\boxed{\hat{\mathsf{R}}_3^{-1}(\phi)\hat{\mathsf{S}}_2\hat{\mathsf{R}}_3(\phi) = \hat{\mathsf{S}}_1 \sin\phi + \hat{\mathsf{S}}_2 \cos\phi}\,. \tag{1.6.4}$$

*Poznámka:* Operátor $\hat{\mathsf{R}}_3(\phi)$ je *operátor rotace* o úhel $\phi$ okolo osy $z$.