10 Koherentní stavy

V této části se bude navazovat na cvičení 3 o algebraickém řešení harmonického oscilátoru. Budeme zkoumat vlastnosti *koherentního stavu* jednorozměrného harmonického oscilátoru

$$\boxed{|z\rangle = \mathrm{e}^{-\frac{|z|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle}\,, \tag{10.0.1}$$

kde $z \in \mathbb{C}$ je libovolné komplexní číslo a $|n\rangle$ je vlastní stav harmonického oscilátoru (3.1.17) příslušející energii E_n, dané vztahem (3.2.16).

Níže uvedený postup bude deduktivní, vycházející z definice koherentního stavu (10.0.1). Lze však postupovat i opačně: Buď hledat stavy harmonického oscilátoru, které minimalizují relace neurčitosti (10.4.12), jak je popsáno v práci [9] (strana 220), nebo hledat takové stavy, které co nejlépe aproximují pohyb klasické částice, neboli splňují vztah (10.5.9) pro střední hodnoty $\hat{\mathsf{x}}$ a $\hat{\mathsf{p}}$. Tento postup je sledován například v učebnici [10].

10.1 Poissonovo rozdělení

Poissonovo rozdělení udává počet n výskytu jevů v určitém intervalu, pokud jsou jednotlivé jevy statisticky nezávislé. Rozdělení je dáno předpisem

$$P_n = \frac{\lambda^n}{n!}\,\mathrm{e}^{-\lambda}\,, \tag{10.1.1}$$

kde λ je parametr Poissonova rozdělení.

1. Ukažte, že rozdělení je normalizované.
2. Nalezněte střední hodnotu Poissonova rozdělení.
3. Nalezněte rozptyl Poissonova rozdělení.

Řešení:

1. Normalizace
$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} = \mathrm{e}^{-\lambda}\,\mathrm{e}^{\lambda} = 1\,. \tag{10.1.2}$$
2. Střední hodnota
$$\langle n\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n = \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} = \mathrm{e}^{-\lambda}\,\lambda\,\mathrm{e}^{\lambda} = \lambda\,. \tag{10.1.3}$$
3. Nejprve spočítáme
$$\begin{aligned} \left\langle n^2\right\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} n^2 P_n = \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \underbrace{n}_{n-1+1} \\ &= \mathrm{e}^{-\lambda}\left[\lambda^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\lambda^{n-2}}{(n-2)!} + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}\right] \\ &= \lambda^2 + \lambda\,. \end{aligned} \tag{10.1.4}$$

Rozptyl je pak

$$(\Delta n)^2 = \left\langle n^2 \right\rangle - \langle n \rangle^2 = \lambda\,. \tag{10.1.5}$$

Poissonovo rozdělení má tedy rozpyl i střední hodnotu stejnou.

10.2 Základní vlastnosti koherentních stavů

1. Ukažte, že skalární součin dvou koherentních stavů (10.0.1) je

$$\langle z|z'\rangle = \mathrm{e}^{-\frac{|z-z'|^2}{2}+\mathrm{i}|z||z'|\sin(\phi'-\phi)}\,, \tag{10.2.1}$$

kde jsme vyjádřili

$$z = |z|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\,, \qquad \phi \in [0, 2\pi]\,. \tag{10.2.2}$$

Koherentní stavy jsou tedy normalizované [díky exponenciálnímu prefaktoru v (10.1.1)], avšak nejsou navzájem ortogonální, což znamená, že $|z\rangle$ netvoří bázi Hilbertova prostoru harmonického oscilátoru (resp. někdy se říká, že báze pomocí koherentních stavů je přeurčená).

2. Ukažte, čemu se rovná pravděpodobnost nalezení stavu $|z'\rangle$, pokud máme systém připravený ve stavu $|z\rangle$.

3. Ukažte, že je splněna relace uzavřenosti ve tvaru

$$\int |z\rangle\,\langle z|\,\frac{\mathrm{d}z}{\pi} = 1\,. \tag{10.2.3}$$

4. Ukažte, že rozdělení energií v koherentním stavu je Poissonovo, tj. že lze psát

$$P_n = |\langle n|z\rangle|^2 = \frac{\lambda^n}{n!}\,\mathrm{e}^{-\lambda}\,. \tag{10.2.4}$$

Nalezněte λ.

5. Na základě vlastností Poissonova rozdělení nalezněte, čemu se rovná střední hodnota energie harmonického oscilátoru v koherentním stavu $\langle E\rangle_z$.

Řešení:

1. Vyjdeme z definice (10.0.1):

$$\begin{aligned}\langle z|z'\rangle &= \mathrm{e}^{-\frac{|z|^2+|z'|^2}{2}} \sum_{n,n'=0}^{\infty} \frac{(z^*)^n (z')^{n'}}{\sqrt{n!n'!}}\underbrace{\langle n|n'\rangle}_{\delta_{nn'}} \\ &= \mathrm{e}^{-\frac{|z|^2+|z'|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z^* z')^n}{n!}\,. \end{aligned}\tag{10.2.5}$$

Definujme

$$z^* = |z|\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}\,, \qquad z' = |z'|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi'} \tag{10.2.6}$$

a vyjádříme

$$\begin{aligned}|z-z'|^2 &= (z-z')(z^*-z'^*)\\ &= |z|^2+|z'|^2-zz'^*-z^*z'\\ &= |z|^2+|z'|^2-|z|\,|z'|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\phi-\phi')}-|z|\,|z'|\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\phi-\phi')}\\ &= |z|^2+|z'|^2-2\,|z|\,|z'|\cos(\phi-\phi')\,. \end{aligned} \tag{10.2.7}$$

Pak

$$\begin{aligned}\langle z|z'\rangle &= \mathrm{e}^{-\frac{|z|^2+|z'|^2}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|z|^n\,|z'|^n}{n!}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}n(\phi'-\phi)}\\ &= \mathrm{e}^{-\frac{|z|^2+|z'|^2}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left[|z|\,|z'|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\phi'-\phi)}\right]^n}{n!}\\ &= \mathrm{e}^{-\frac{|z|^2+|z'|^2}{2}}\,\mathrm{e}^{|z||z'|[\cos(\phi'-\phi)+\mathrm{i}\sin(\phi'-\phi)]}\\ &= \mathrm{e}^{-\frac{|z'-z|^2}{2}+\mathrm{i}|z||z'|\sin(\phi'-\phi)}\,. \end{aligned}\tag{10.2.8}$$

Dostáváme tedy $\langle z|z\rangle = 1$, avšak $\langle z|z'\rangle \neq 0$ je obecně komplexní číslo.

2. Hledaná pravděpodobnost je dána kvadrátem amplitudy (10.2.1)

$$|\langle z'|z\rangle| = \mathrm{e}^{-|z'-z|}\,. \tag{10.2.9}$$

3. Komplexní číslo z vyjádříme pomocí velikosti a fáze (10.2.2), kde pro zjednodušení zápisu označíme $r\equiv|z|$. Pak $\mathrm{d}z = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi$ a integrál relací uzavřenosti je

$$\begin{aligned}\int |z\rangle\langle z|\frac{\mathrm{d}z}{\pi} &= \int \mathrm{e}^{-r^2}\sum_{n,n'=0}^{\infty}\frac{r^n\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\phi}}{\sqrt{n!}}\frac{r^{n'}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n'\phi}}{\sqrt{n'!}}\,|n\rangle\langle n'|\,\frac{r}{\pi}\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi\\ &= \sum_{n,n'=0}^{\infty}\frac{|n\rangle\langle n'|}{\pi\sqrt{n!n'!}}\underbrace{\int_0^\infty \mathrm{e}^{-r^2}\,r^{n+n'+1}\mathrm{d}r}_{\rho\equiv r^2\,,\quad \mathrm{d}\rho=2r\mathrm{d}r}\underbrace{\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-n')\phi}\,\mathrm{d}\phi}_{2\pi\delta_{nn'}}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2\,|n\rangle\langle n|}{n!}\frac{1}{2}\underbrace{\int_0^\infty \rho^n\,\mathrm{e}^{-n}\,\mathrm{d}\rho}_{\Gamma(n+1)=n!}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}|n\rangle\langle n| = 1\,. \end{aligned}\tag{10.2.10}$$

4. Dosadíme do definičního vztahu (10.0.1)

$$P_n = |\langle n|z\rangle|^2 = \left|\mathrm{e}^{-\frac{|z|^2}{2}}\frac{z^n}{\sqrt{n!}}\right|^2 = \mathrm{e}^{-|z|^2}\,\frac{|z|^{2n}}{n!}$$

a srovnáme s Poissonovým rozdělením (10.1.1), čímž dostaneme

$$\lambda = |z|^2\,. \tag{10.2.11}$$

5. Vyjdeme ze vztahu (3.2.16) pro energii stavu $|k\rangle$. Počítáme střední hodnotu

$$\langle E\rangle_z = \sum_{n=0}^{\infty}\hbar\Omega\left(n+\frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-\lambda}\,\frac{\lambda^n}{n!} = \hbar\Omega\left(\lambda+\frac{1}{2}\right) = \hbar\Omega\left(|z|^2+\frac{1}{2}\right)\,. \tag{10.2.12}$$

10.3 Vlastní stav operátoru $\hat{a}$

1. Ukažte, že pro posunovací operátor $\hat{a}$ platí

$$\boxed{\hat{a}\,|z\rangle = z\,|z\rangle}\,. \tag{10.3.1}$$

   To znamená, že koherentní stav $|z\rangle$ je vlastním stavem $\hat{a}$ s vlastní hodnotou z. Operátor $\hat{a}$ není hermitovský, proto jsou jeho vlastní hodnoty komplexní.

2. Ukažte, že neexistuje žádný vlastní stav posunovacího operátoru $\hat{a}^\dagger$.

3. Pomocí Bakerovy-Campbellovy-Hausdorffovy formule (1.6.6) ukažte, že koherentní stav lze vyjádřit také ve tvaru

$$|z\rangle = \mathrm{e}^{z\hat{a}^\dagger - z^*\hat{a}}\,|0\rangle\,. \tag{10.3.2}$$

Řešení:

1. Využijeme definice koherentního stavu (10.0.1) a vztahu pro posunovací operátor (3.1.14)

$$\begin{aligned}\hat{a}\,|z\rangle &= \mathrm{e}^{-\frac{|z|^2}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\sqrt{n!}}\underbrace{\hat{a}\,|n\rangle}_{\sqrt{n}|n-1\rangle}\\ &= z\,\mathrm{e}^{-\frac{|z|^2}{2}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n-1}}{\sqrt{(n-1)!}}\,|n-1\rangle\\ &= z\,|z\rangle\,.\end{aligned} \tag{10.3.3}$$

2. Předpokládejme, že existuje vlastní stav operátoru $\hat{a}^\dagger$ s vlastní hodnotou λ

$$\hat{a}^\dagger\,|\psi(z)\rangle = z\,|\psi(z)\rangle\,, \tag{10.3.4}$$

   který lze vyjádřit v bázi $|n\rangle$ jako rozvoj

$$|\psi(z)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\frac{z^n}{\sqrt{n!}}\,|n\rangle\,. \tag{10.3.5}$$

   Působení $\hat{a}^\dagger$ dá

$$\hat{a}^\dagger\,|\psi(z)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\frac{z^n}{(n+1)!}\,|n+1\rangle\,, \tag{10.3.6}$$

   takže v rozvoji (10.3.5) musí být $a_0 = 0$. Pokud pokračujeme indukcí dál, dostaneme, že $a_n = 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$. Vlastní stav $|\psi(z)\rangle$ tedy neexistuje.

3. BCH formule(1.6.6) zní

$$\mathrm{e}^{\hat{A}+\hat{B}} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}[\hat{A},\hat{B}]}\,\mathrm{e}^{\hat{A}}\,\mathrm{e}^{\hat{B}}\,, \tag{10.3.7}$$

   přičemž platí za předpokladu

$$\left[\hat{A},\left[\hat{A},\hat{B}\right]\right] = \left[\hat{B},\left[\hat{A},\hat{B}\right]\right] = 0\,. \tag{10.3.8}$$

Dosadíme $\hat{\mathsf{A}} = z\hat{\mathsf{a}}^\dagger$, $\hat{\mathsf{B}} = -z^*\hat{\mathsf{a}}$ (komutační relace (10.3.8) jsou splněny, jelikož $\left[z\hat{\mathsf{a}}^\dagger, -z^*\hat{\mathsf{a}}\right] = zz^* = |z|^2$ je c-číslo), což dá

$$e^{z\hat{\mathsf{a}}^\dagger - z^*\hat{\mathsf{a}}} = e^{-\frac{|z|^2}{2}}\, e^{z\hat{\mathsf{a}}^\dagger}\, e^{z^*\hat{\mathsf{a}}}\ . \tag{10.3.9}$$

Jelikož $\hat{\mathsf{a}}\,|0\rangle = 0$, je také

$$e^{-z^*\hat{\mathsf{a}}}\,|0\rangle = 0 \tag{10.3.10}$$

a dostáváme za použití vztahu (3.1.17)

$$\begin{aligned} e^{z\hat{\mathsf{a}}^\dagger - z^*\hat{\mathsf{a}}}\,|0\rangle &= e^{-\frac{|z|}{2}}\, e^{z\hat{\mathsf{a}}^\dagger}\,|0\rangle \\ &= e^{-\frac{|z|}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \hat{\mathsf{a}}^{\dagger n}\,|0\rangle \\ &= e^{-\frac{|z|}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \sqrt{n!}\,|n\rangle \\ &= |z\rangle\ . \end{aligned} \tag{10.3.11}$$

10.4 Střední hodnoty operátorů

1. Nalezněte střední hodnotu energie harmonického oscilátoru ve stavu $|z\rangle$ a porovnejte s výsledkem (10.2.12).

2. Určete střední hodnoty operátorů polohy a hybnosti

$$\langle\hat{\mathsf{x}}\rangle_z \equiv \langle z|\hat{\mathsf{x}}|z\rangle\ , \qquad \langle\hat{\mathsf{p}}\rangle_z \equiv \langle z|\hat{\mathsf{p}}|z\rangle \tag{10.4.1}$$

   a vyjádřete pomocí nich číslo z.

3. Určete střední kvadratickou odchylku operátorů souřadnice a hybnosti

$$(\Delta\hat{\mathsf{x}})^2 \equiv \left\langle z\middle|(\hat{\mathsf{x}} - \langle\hat{\mathsf{x}}\rangle_z)^2\middle|z\right\rangle\ , \qquad (\Delta\hat{\mathsf{p}})^2 \equiv \left\langle z\middle|(\hat{\mathsf{p}} - \langle\hat{\mathsf{p}}\rangle_z)^2\middle|z\right\rangle \tag{10.4.2}$$

   a pomocí nich ukažte, že koherentní stavy minimalizují relace neurčitosti.

Řešení:

1. Vyjdeme z vyjádření Hamiltoniánu harmonického oscilátoru pomocí posunovacích operátorů (3.2.15). Pomocí vztahu (10.3.1) ihned dostaneme

$$\left\langle z\middle|\hat{\mathsf{H}}\middle|z\right\rangle = \left\langle z\middle|\hbar\Omega\left(\hat{\mathsf{a}}^\dagger\hat{\mathsf{a}} + \frac{1}{2}\right)\middle|z\right\rangle = \hbar\Omega\left(|z|^2 + \frac{1}{2}\right)\ , \tag{10.4.3}$$

   což je totéž jako (10.2.12) .

2. Vyjdeme ze vztahu mezi souřadnicí posunovacími operátory (3.2.21)[32]:

$$
\begin{aligned}
\langle z|\hat{\mathsf{x}}|z\rangle &= \mathrm{e}^{-|z|^2} \sum_{n,n'=0}^{\infty} \frac{z^{*n}}{\sqrt{n!}} \frac{z^{n'}}{\sqrt{n'!}} \underbrace{\langle n'|\hat{\mathsf{x}}|n\rangle}_{\sqrt{\frac{\hbar}{2M\Omega}}\left(\sqrt{n+1}\delta_{n',n+1}+\sqrt{n}\delta_{n',n-1}\right)} \\
&= \mathrm{e}^{-|z|^2} \sqrt{\frac{\hbar}{2M\Omega}} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{*n} z^{n+1}}{\sqrt{n!(n+1)!}} \sqrt{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{*n} z^{n-1}}{\sqrt{n!(n-1)!}} \sqrt{n}\right] \\
&= \mathrm{e}^{-|z|^2} \sqrt{\frac{\hbar}{2M\Omega}} \left[z\, \mathrm{e}^{|z|^2} + z^*\, \mathrm{e}^{|z|^2}\right] \\
&= \sqrt{\frac{2\hbar}{M\Omega}} \operatorname{Re} z\,.
\end{aligned}
\tag{10.4.5}
$$

Podobně pomocí vztahu (3.2.22) mezi hybností a posunovacími operátory dostaneme

$$
\langle z|\hat{\mathsf{p}}|z\rangle = \sqrt{2\hbar M\Omega}\, \operatorname{Im} z\,. \tag{10.4.6}
$$

Číslo z lze tedy vyjádřit jako

$$
z = \sqrt{\frac{M\Omega}{2\hbar}} \left(\langle\hat{\mathsf{x}}\rangle_z + \frac{\mathrm{i}}{M\Omega}\langle\hat{\mathsf{p}}\rangle_z\right)\,. \tag{10.4.7}
$$

Reálná část čísla z udává střední hodnotu *souřadnice*, imaginární část z střední hodnotu *hybnosti*.

3. Pro střední kvadratickou odchylku nejprve určíme

$$
\begin{aligned}
\hat{\mathsf{x}}^2 &= \frac{\hbar}{2M\Omega}\left(\hat{\mathsf{a}}^2 + \hat{\mathsf{a}}\hat{\mathsf{a}}^\dagger + \hat{\mathsf{a}}^\dagger\hat{\mathsf{a}} + \hat{\mathsf{a}}^{\dagger 2}\right) \\
&= \frac{\hbar}{2M\Omega}\left(\hat{\mathsf{a}}^2 + 2\hat{\mathsf{a}}^\dagger\hat{\mathsf{a}} + 1 + \hat{\mathsf{a}}^{\dagger 2}\right)
\end{aligned}
\tag{10.4.8}
$$

(využili jsme komutační relace $\left[\hat{\mathsf{a}},\hat{\mathsf{a}}^\dagger\right] = 1$) a pomocí vztahů analogických k (10.4.4) dostaneme

$$
\left\langle z\middle|\hat{\mathsf{x}}^2\middle|z\right\rangle = \frac{\hbar}{2M\Omega}\left(z^2 + 2|z|^2 + 1 + z^{*2}\right)\,. \tag{10.4.9}
$$

Střední kvadratická odchylka je tedy

$$
(\Delta\hat{\mathsf{x}})^2 = \frac{\hbar}{2M\Omega}\left(z^2 + 2|z|^2 + 1 + z^{*2} - z^2 - 2|z|^2 - z^{*2}\right) = \frac{\hbar}{2M\Omega} \tag{10.4.10}
$$

a podobně pro hybnosti

$$
(\Delta\hat{\mathsf{p}})^2 = \frac{\hbar M\Omega}{2}\,. \tag{10.4.11}
$$

Relace neurčitosti pro koherentní stav tedy zní

$$
(\Delta\hat{\mathsf{x}})^2(\Delta\hat{\mathsf{p}})^2 = \frac{\hbar^2}{4}\,. \tag{10.4.12}
$$

---

[32] Místo následujícího explicitního výpočtu lze využít i jednodušší postup pomocí (10.3.1):

$$
\langle z|\hat{\mathsf{a}}|z\rangle = z\,, \qquad \left\langle z\middle|\hat{\mathsf{a}}^\dagger\middle|z\right\rangle = \left(\langle z|\hat{\mathsf{a}}|z\rangle\right)^* = z^*\,. \tag{10.4.4}
$$

10.5 Časový vývoj

1. Nalezněte vyjádření koherentního stavu v čase t, tj.

$$|z(t)\rangle = \hat{\mathsf{U}}(t)\,|z\rangle\,, \tag{10.5.1}$$

kde $\hat{\mathsf{U}}(t)$ je operátor časového vývoje.

2. Určete střední hodnoty operátorů polohy a hybnosti v čase t

$$\langle\hat{\mathsf{x}}(t)\rangle_z \equiv \langle z(t)|\hat{\mathsf{x}}|z(t)\rangle\ , \qquad \langle\hat{\mathsf{p}}(t)\rangle_z \equiv \langle z(t)|\hat{\mathsf{p}}|z(t)\rangle\ . \tag{10.5.2}$$

Ukažte, že časový vývoj koherentního stavu lze znázornit jako elipsu v grafu, kde na osy vynášíme $\langle\hat{\mathsf{x}}(t)\rangle_z$ proti $\langle\hat{\mathsf{p}}(t)\rangle_z$, konzistentně s klasickou teorií.

3. Nalezněte podmínku pro hodnotu z, za které bude elipsa v klasickém případě a v kvantovém případě pro střední hodnoty stejná.

Řešení:

1. Evoluční operátor je dán výrazem

$$\hat{\mathsf{U}}(t) = \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{\mathsf{H}}t} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Omega t\left(\hat{\mathsf{a}}^\dagger\hat{\mathsf{a}}+\frac{1}{2}\right)}\ . \tag{10.5.3}$$

Zapůsobíme na koherentní stav:

$$\begin{aligned}
|z(t)\rangle &= \mathrm{e}^{-\frac{|z|^2}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\sqrt{n!}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Omega t\left(n+\frac{1}{2}\right)}\,|n\rangle \\
&= \mathrm{e}^{-\frac{|z|^2}{2}-\frac{\mathrm{i}\Omega t}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(z\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Omega t}\right)^n}{\sqrt{n!}}\,|n\rangle \\
&= \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\Omega t}{2}}\left|z\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Omega t}\right\rangle\ .
\end{aligned} \tag{10.5.4}$$

Časový vývoj je tedy až na fázi dán periodickou oscilací čísla z s frekvencí Ω,

$$z(t) = z\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Omega t}\ . \tag{10.5.5}$$

Jak víme z předchozího příkladu, reálná a imaginární část čísla z udává střední hodnotu polohy a hybnosti (10.4.7). Tyto střední hodnoty se tedy budou měnit v čase, což se explicitně ukáže v následující části úlohy.

2. Vyjádříme-li číslo z pomocí rozkladu na velikost a fázi (10.2.2), lze časový vývoj středních hodnot zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned}
\langle\hat{\mathsf{x}}(t)\rangle_z &= \sqrt{\frac{2\hbar}{M\Omega}}\,\mathrm{Re}\,z(t) = \sqrt{\frac{2\hbar}{M\Omega}}\,|z|\cos\left[\phi(0)-\mathrm{i}\Omega t\right], \\
\langle\hat{\mathsf{p}}(t)\rangle_z &= \sqrt{2\hbar M\Omega}\,\mathrm{Im}\,z(t) = \sqrt{2\hbar M\Omega}\,|z|\sin\left[\phi(0)-\mathrm{i}\Omega t\right].
\end{aligned} \tag{10.5.6}$$

Střední hodnoty hybnosti a polohy lze převést na tvar

$$\frac{\langle\hat{\mathsf{x}}(t)\rangle_z^2}{A_q^2} + \frac{\langle\hat{\mathsf{p}}(t)\rangle_z^2}{B_q^2} = 1\,, \tag{10.5.7}$$

což je rovnice elipsy s poloosami

$$A_q = \sqrt{\frac{2\hbar}{M\Omega}}\,|z| \,,$$
$$B_q = \sqrt{2\hbar M\Omega}\,|z| \,. \tag{10.5.8}$$

3. V klasickém případě máme

$$E = \frac{1}{2M}p^2 + \frac{1}{2}M\Omega^2 x^2 \,, \tag{10.5.9}$$

takže

$$\frac{x^2}{A_c^2} + \frac{p^2}{B_c^2} = 1 \,, \tag{10.5.10}$$

kde

$$A_c = \sqrt{\frac{2E}{M\Omega^2}} \,,$$
$$B_c = \sqrt{2ME} \,. \tag{10.5.11}$$

Střední hodnota energie v kvantovém případě popsaném koherentním stavem $|z\rangle$ je (10.2.12). Pro velké hodnoty z lze zanedbat faktor $1/2$ a přibližně tedy platí

$$\langle E \rangle_z \approx \hbar\Omega\,|z|^2 \,. \tag{10.5.12}$$

Čím větší je hodnota z, tím lépe bude koherentní stav odpovídat pohybu klasické částice o stejné energii.