11 Časový vývoj

11.1 Ramseyův přístroj

Částice se spinem 1/2 a velikostí magnetického momentu μ, popsaná vlnovou funkcí (spinorem)

$$|\psi\rangle(t) = \psi_+(t)\,|+\rangle + \psi_-(t)\,|-\rangle = \begin{pmatrix}\psi_+(t)\\ \psi_-(t)\end{pmatrix}\,, \tag{11.1.1}$$

se pohybuje v zařízení složeném ze tří oblastí. V první oblasti (1. Ramseyova oblast) je zapnuté magnetické pole složené ze stacionární složky $\boldsymbol{B}_0$ směřující podél osy z a rotující složky $\boldsymbol{B}_1(t)$ v rovině (x, y)

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}_0 &= (0, 0, B_0)\\ \boldsymbol{B}_1(t) &= (B_1\cos\omega t, -B_1\sin\omega t, 0)\end{aligned} \tag{11.1.2}$$

a částice v ní stráví dobu dobu τ. V druhé oblasti je rotující pole vypnuto a po dobu T se částice pohybuje pouze ve stacionárním poli $\boldsymbol{B}_0$. Poté (2. Ramseyova oblast) je rotující pole zapnuto, a to opět na dobu τ[33].

1. Napište Hamiltonián v Ramseyově oblasti.

2. Nalezněte složky evolučního operátoru [1]

   $$\mathsf{U}(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\omega t}{2}\sigma_3}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\Omega t}{2}(\hat{\boldsymbol{n}}_\Omega\cdot\boldsymbol{\sigma})} \tag{11.1.3}$$

   kde

   $$\Omega = \sqrt{(\omega-\omega_0)^2+\omega_1^2}\,,\qquad \hat{\boldsymbol{n}}_\Omega = \frac{1}{\Omega}\begin{pmatrix}-\omega_1\\ 0\\ \omega-\omega_0\end{pmatrix}\,,\qquad \omega_{0,1} = \frac{2\mu}{\hbar}B_{0,1}\,. \tag{11.1.4}$$

3. Nalezněte složky evolučního operátoru $\mathsf{U}(t; t_0)$, který vyvíjí systém z času t_0 do času t.

4. Nalezněte složky evolučního operátoru $\mathsf{U}_0(\tau + T; \tau)$ oblasti, kde je vypnuté pole $\boldsymbol{B}_1$.

5. Proces průchodu zařízením složeným z dvou Ramseyových oblastí s mezioblastí s vypnutým polem B_1 je dán evolučním operátorem

   $$\mathsf{U}_F = \mathsf{U}(2\tau+T; \tau+T)\mathsf{U}_0(\tau+T; \tau)\mathsf{U}(\tau; 0)\,. \tag{11.1.5}$$

   Nalezněte amplitudu pravděpodobnosti $A_{(-+)}$ a pravděpodobnost $P_{(-+)}$, že systém připravený na počátku ve stavu, kdy projekce spinu na osu z je $+1/2$,

   $$|\psi_i\rangle = |+\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\,, \tag{11.1.6}$$

   bude po průchodu zařízením ve stavu, kdy projekce spinu bude $-1/2$ (dojde k překlopení spinu [34]):

   $$|\psi_f\rangle = |-\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\,. \tag{11.1.7}$$

[33] Experiment navrhl v 50. letech 20. století N.F. Ramsley a v roce 1989 za něj dostal Nobelovu cenu.

[34] spin flip

6. Nalezněte amplitudu pravděpodobnosti $A^{(1)}_{(-+)}$ ($A^{(1)}_{(++)}$), že k přehození spinu dojde (nedojde) po průchodu 1. Ramseyovou oblastí a oblastí bez oscilujícího pole.

7. Nalezněte amplitudu pravděpodobnosti $A^{(2)}_{(-+)}$ ($A^{(2)}_{(--)}$), že k přehození spinu dojde (nedojde) po průchodu 2. Ramseyovou oblastí.

8. Ověřte, že složením amplitud pravděpodobnosti z předchozích dvou bodů dostanete amplitudu pravděpodobnosti A_{12}. Ukažte, že pravděpodobnost obsahuje interferenční člen.

9. V rezonančním případě, kdy je úhlová frekvence oscilujícího pole ω stejná jako Larmorova frekvence ω_0, najděte matici pravděpodobností přechodu $\mathsf{P}^{\mathrm{rez}}$, jejíž složky $P^{\mathrm{rez}}_{(fi)}$ udávají pravděpodobnosti, že spin, který vlétá do zařízení s polarizací $i \in \{+,-\}$ vylétne s polarizací $f \in \{+,-\}$.

Poznámka:

Příklad je přejat z monografie [10], kapitola 8.8.

Řešení:

1. Pauliho matice $\boldsymbol{\sigma}$ jsou dány vztahy (2.0.1). Matice Hamiltoniánu v Ramseyově oblasti je

$$\mathsf{H} = -\mu\, \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{B}(t) = \begin{pmatrix} \frac{\hbar\omega_0}{2} & \mu B_1\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \\ \mu B_1\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} & -\frac{\hbar\omega_0}{2} \end{pmatrix} . \tag{11.1.8}$$

2. K výpočtu evolučního operátoru (11.1.3) využijeme vztah (2.2.1)[35]. Pomocí něj dostaneme[36]

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\omega t}{2}\sigma_3} = \cos\frac{\omega t}{2} + \mathrm{i}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \sin\frac{\omega t}{2} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\omega t}{2}} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega t}{2}} \end{pmatrix} , \tag{11.1.9}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\Omega t}{2}(\hat{\boldsymbol{n}}_\Omega\cdot\boldsymbol{\sigma})} &= \cos\frac{\Omega t}{2} - \mathrm{i}\,(\hat{\boldsymbol{n}}_\Omega\cdot\boldsymbol{\sigma})\sin\frac{\Omega t}{2} \\ &= \cos\frac{\Omega t}{2} - \frac{\mathrm{i}}{\Omega}\begin{pmatrix} \omega-\omega_0 & -\omega_1 \\ -\omega_1 & -(\omega-\omega_0) \end{pmatrix}\sin\frac{\Omega t}{2} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\frac{\Omega t}{2} - \frac{\mathrm{i}}{\Omega}(\omega-\omega_0)\sin\frac{\Omega t}{2} & \mathrm{i}\frac{\omega_1}{\Omega}\sin\frac{\Omega t}{2} \\ \mathrm{i}\frac{\omega_1}{\Omega}\sin\frac{\Omega t}{2} & \cos\frac{\Omega t}{2} + \frac{\mathrm{i}}{\Omega}(\omega-\omega_0)\sin\frac{\Omega t}{2} \end{pmatrix} , \end{aligned} \tag{11.1.10}$$

což po vynásobení dává

$$\mathsf{U}(t) = \begin{pmatrix} \left[\cos\frac{\Omega t}{2} - \mathrm{i}\frac{\Delta\omega}{\Omega}\sin\frac{\Omega t}{2}\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\omega t}{2}} & \mathrm{i}\frac{\omega_1}{\Omega}\sin\frac{\Omega t}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\omega t}{2}} \\ \mathrm{i}\frac{\omega_1}{\Omega}\sin\frac{\Omega t}{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega t}{2}} & \left[\cos\frac{\Omega t}{2} + \mathrm{i}\frac{\Delta\omega}{\Omega}\sin\frac{\Omega t}{2}\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega t}{2}} \end{pmatrix} , \tag{11.1.11}$$

kde $\Delta\omega \equiv \omega - \omega_0$.

---

[35] Vztah (2.2.1) je možné použít jen v případě, že $|\hat{\boldsymbol{n}}| = 1$. To je zaručeno normalizačním faktorem $\frac{1}{\Omega}$ ve vyjádření vektoru $\hat{\boldsymbol{n}}$ v (11.1.4).

[36] První vztah lze určit i přímo díky tomu, že matice σ_3 je diagonální.

3. Evoluční operátor (11.1.11) vyvíjí systém z času $t_0 = 0$ do času t, jedná se tedy formálně o operátor $\mathsf{U}(t;0)$. Operátor $\mathsf{U}(t;t_0)$ dostaneme využitím unitarity evolučního operátoru

$$\mathsf{U}(t;t_0) = \mathsf{U}(t;0)\mathsf{U}(0;t_0) = \mathsf{U}(t;0)\mathsf{U}^{-1}(t_0;0) = \mathsf{U}(t;0)\mathsf{U}^{\dagger}(t_0;0)\,. \tag{11.1.12}$$

Výsledek lze získat buď přímým pronásobením odpovídajících matic (11.1.11), nebo z definičního vztahu (11.1.3)

$$\begin{aligned}\mathsf{U}(t;t_0) &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\omega t}{2}\sigma_3}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\Omega t}{2}(\hat{\boldsymbol{n}}_\Omega\cdot\boldsymbol{\sigma})}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\Omega t_0}{2}(\hat{\boldsymbol{n}}_\Omega\cdot\boldsymbol{\sigma})}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega t_0}{2}\sigma_3} \\ &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\omega t}{2}\sigma_3}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\Omega(t-t_0)}{2}(\hat{\boldsymbol{n}}_\Omega\cdot\boldsymbol{\sigma})}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega t_0}{2}\sigma_3}\,,\end{aligned} \tag{11.1.13}$$

což po dosazení matic (11.1.9) a (11.1.10) vede na

$$\begin{aligned}U_{11}(t;t_0) &= \left[\cos\frac{\Omega\,(t-t_0)}{2} - \mathrm{i}\frac{\Delta\omega}{\Omega}\sin\frac{\Omega\,(t-t_0)}{2}\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\omega(t-t_0)}{2}}\,, \\ U_{12}(t;t_0) &= -U_{21}^{*}(t;t_0) = \mathrm{i}\frac{\omega_1}{\Omega}\sin\frac{\Omega\,(t-t_0)}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\omega(t+t_0)}{2}}\,, \\ U_{22}(t;t_0) &= \left[\cos\frac{\Omega\,(t-t_0)}{2} + \mathrm{i}\frac{\Delta\omega}{\Omega}\sin\frac{\Omega\,(t-t_0)}{2}\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega(t-t_0)}{2}}\end{aligned} \tag{11.1.14}$$

(v exponenciálách mimodiagonálních prvků je *součet* časů $t + t_0$).

4. Evoluční operátor v oblasti vypnutého pole $\boldsymbol{B}_1$ dostaneme například přímým výpočtem z (11.1.14). V této oblasti $\omega_1 = 0$, takže $\Omega = \omega - \omega_0 = \Delta\omega$ a

$$U_0(\tau+T;\tau) = \begin{pmatrix}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\Delta\omega T}{2}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\omega T}{2}} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\Delta\omega T}{2}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega T}{2}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\omega_0 T}{2}} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega_0 T}{2}}\end{pmatrix}. \tag{11.1.15}$$

Operátor nezávisí na čase τ, nýbrž jen na rozdílu počátečního a koncového času.

5. Hledáme amplitudu

$$A_{(-+)} = \left\langle\psi_f\middle|\hat{\mathsf{U}}_F\middle|\psi_i\right\rangle = \begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}\mathsf{U}_F\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}. \tag{11.1.16}$$

Výpočet rozdělíme na dvě části:

$$\begin{aligned}\mathsf{U}_0(\tau+T;\tau)\mathsf{U}(\tau;0)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\omega_0 T}{2}} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega_0 T}{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\left(\cos\frac{\Omega\tau}{2} - \mathrm{i}\frac{\Delta\omega}{\Omega}\sin\frac{\Omega\tau}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\omega\tau}{2}} \\ \mathrm{i}\frac{\omega_1}{\Omega}\sin\frac{\Omega\tau}{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega\tau}{2}}\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}\left(\cos\frac{\Omega\tau}{2} - \mathrm{i}\frac{\Delta\omega}{\Omega}\sin\frac{\Omega\tau}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\omega\tau}{2}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\omega_0 T}{2}} \\ \mathrm{i}\frac{\omega_1}{\Omega}\sin\frac{\Omega\tau}{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega\tau}{2}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega_0 T}{2}}\end{pmatrix},\end{aligned} \tag{11.1.17}$$

$$\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}\mathsf{U}(2\tau+T;\tau+T) = \begin{pmatrix}\mathrm{i}\frac{\omega_1}{\Omega}\sin\frac{\Omega\tau}{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega(3\tau+2T)}{2}} \\ \left(\cos\frac{\Omega\tau}{2} + \mathrm{i}\frac{\Delta\omega}{\Omega}\sin\frac{\Omega\tau}{2}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega\tau}{2}}\end{pmatrix}, \tag{11.1.18}$$

a po vynásobení těchto dvou výrazů dostaneme

$$\begin{aligned}A_{(-+)} &= \mathrm{i}\frac{\omega_1}{\Omega}\sin\frac{\Omega\tau}{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega T}{2}} \\ &* \left[\left(\cos\frac{\Omega\tau}{2} - \mathrm{i}\frac{\Delta\omega}{\Omega}\sin\frac{\Omega\tau}{2}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\Delta\omega T}{2}} + \left(\cos\frac{\Omega\tau}{2} + \mathrm{i}\frac{\Delta\omega}{\Omega}\sin\frac{\Omega\tau}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\Delta\omega T}{2}}\right].\end{aligned} \tag{11.1.19}$$

Pravděpodobnost přehození spinu je tedy (v průběhu výpočtu pro zjednodušení zápisu označíme $s \equiv \sin\frac{\Omega\tau}{2}$, $c \equiv \cos\frac{\Omega\tau}{2}$, $f \equiv \frac{\Delta\omega T}{2}$)

$$
\begin{aligned}
P_{(-+)} &= A^*_{(-+)} A_{(-+)} \\
&= \left(\frac{\omega_1}{\Omega}\right)^2 s^2 \left[\left(c - \mathrm{i}\frac{\Delta\omega}{\Omega}s\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}f} + \left(c + \mathrm{i}\frac{\Delta\omega}{\Omega}s\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}f}\right]^2 \\
&= \left(\frac{\omega_1}{\Omega}\right)^2 s^2 \left[\left(c^2 - \frac{2\mathrm{i}\Delta\omega}{\Omega}cs - \frac{\Delta\omega^2}{\Omega^2}\right)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}f} + \left(c^2 + \frac{2\mathrm{i}\Delta\omega}{\Omega}cs - \frac{\Delta\omega^2}{\Omega^2}\right)\mathrm{e}^{2\mathrm{i}f}\right. \\
&\qquad\qquad \left. +2\left(c^2 + \frac{\Delta\omega^2}{\Omega^2}s^2\right)\right] \\
&= \left(\frac{\omega_1}{\Omega}\right)^2 s^2 \left[c^2\left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}f} + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}f} + 2\right) - \frac{\Delta\omega^2}{\Omega^2}s^2\left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}f} + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}f} - 2\right) + \frac{2\mathrm{i}\Delta\omega}{\Omega}cs\left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}f} + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}f}\right)\right] \\
&= \left(\frac{\omega_1}{\Omega}\right)^2 s^2 \left[c^2\left(2 + 2\cos 2f\right) + \frac{\Delta\omega^2}{\Omega^2}s^2\left(2 - 2\cos 2f\right) - \frac{4\Delta\omega}{\Omega}cs\sin 2f\right] \\
&= \left(\frac{\omega_1}{\Omega}\right)^2 s^2 \left(4c^2\cos^2 f + 4\frac{\Delta\omega^2}{\Omega^2}s^2\sin^2 f - \frac{8\Delta\omega}{\Omega}cs\cos f\sin f\right) \\
&= 4\left(\frac{\omega_1}{\Omega}\right)^2 \sin^2\frac{\Omega\tau}{2}\left(\cos\frac{\Omega\tau}{2}\cos\frac{\Delta\omega T}{2} - \frac{\Delta\omega}{\Omega}\sin\frac{\Omega\tau}{2}\sin\frac{\Delta\omega T}{2}\right)^2 .
\end{aligned} \tag{11.1.20}
$$

6. K výpočtu amplitud $A^{(1)}_{(-+)}$ a $A^{(1)}_{(++)}$ využijeme mezivýsledku (11.1.17):

$$
\begin{aligned}
A^{(1)}_{(-+)} &= \begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix} \mathsf{U}_0(\tau+T;\tau)\mathsf{U}(\tau;0)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \mathrm{i}\frac{\omega_1}{\Omega}\sin\frac{\Omega\tau}{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega\tau}{2}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega_0 T}{2}} , \\
A^{(1)}_{(++)} &= \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix} \mathsf{U}_0(\tau+T;\tau)\mathsf{U}(\tau;0)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \left(\cos\frac{\Omega\tau}{2} - \mathrm{i}\frac{\Delta\omega}{\Omega}\sin\frac{\Omega\tau}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\omega\tau}{2}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\omega_0 T}{2}} .
\end{aligned} \tag{11.1.21}
$$

7. K výpočtu amplitud $A^{(2)}_{(-+)}$ a $A^{(2)}_{(--)}$ využijeme mezivýsledku (11.1.18):

$$
\begin{aligned}
A^{(2)}_{(-+)} &= \begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix} \mathsf{U}(2\tau+T;\tau+T)(\tau;0)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \mathrm{i}\frac{\omega_1}{\Omega}\sin\frac{\Omega\tau}{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega(3\tau+2T)}{2}} , \\
A^{(2)}_{(--)} &= \begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix} \mathsf{U}(2\tau+T;\tau+T)(\tau;0)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \left(\cos\frac{\Omega\tau}{2} + \mathrm{i}\frac{\Delta\omega}{\Omega}\sin\frac{\Omega\tau}{2}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega\tau}{2}} .
\end{aligned} \tag{11.1.22}
$$

8. Přímým dosazením výsledků předchozích dvou bodů vidíme, že

$$
A_{(-+)} = \underbrace{A^{(2)}_{(-+)}A^{(1)}_{(++)}}_{A_{(-++)}} + \underbrace{A^{(2)}_{(--)}A^{(1)}_{(-+)}}_{A_{(--+)}} . \tag{11.1.23}
$$

Platí tedy

$$
P_{(-+)} = \left|A_{(-++)}\right|^2 + \left|A_{(--+)}\right|^2 + \underbrace{A^*_{(-++)}A_{(--+)} + A_{(-++)}A^*_{(--+)}}_{\text{interferenční člen}} . \tag{11.1.24}
$$

9. V rezonančním případě je podle (11.1.4) $\Omega = \omega_1$ a $\Delta\omega = 0$, takže dostaneme

$$P^{\text{rez}}_{(-+)} = 4\sin^2\frac{\omega_1\tau}{2}\cos^2\frac{\omega_1\tau}{2} = \sin^2\omega_1\tau\,. \tag{11.1.25}$$

K výpočtu ostatních pravděpodobností můžeme využít vlastností

$$\begin{aligned} P_{(--)} + P_{(-+)} = 1 = P_{(+-)} + P_{(++)} = 1 \\ P_{(-+)} = P_{(+-)} \end{aligned} \tag{11.1.26}$$

(první vztah vyplývá z toho, že spin musí projít v jednom ze dvou možných ortogonálních stavů, druhý vztah plyne ze symetrie systému). Dostáváme tedy

$$\boxed{\mathsf{P}^{\text{rez}} = \begin{pmatrix} \cos^2\omega_1\tau & \sin^2\omega_1\tau \\ \sin^2\omega_1\tau & \cos^2\omega_1\tau \end{pmatrix}}\,. \tag{11.1.27}$$

Speciální případy:

$$\begin{aligned}
&\omega_1\tau = k\pi && \mathsf{P}^{\text{rez}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} && \text{– spin projde bez překlopení} \\
&\omega_1\tau = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi && \mathsf{P}^{\text{rez}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} && \text{– 100\% pravděpodobnost překlopení spinu} \\
&\omega_1\tau = \frac{1}{2}\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi && \mathsf{P}^{\text{rez}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} &&
\end{aligned} \tag{11.1.28}$$

přičemž $k \in \mathbb{Z}$.