2 Spektrum operátoru, Pauliho matice, spin

Pauliho matice

Pauliho matice

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{2.0.1}$$

jsou unitární, hermitovské a unimodulární matice s nulovou stopou, které navíc splňují relace momentu hybnosti:

$$\sigma_j = \sigma_j^\dagger = \sigma_j^{-1}, \tag{2.0.2}$$

$$\det \sigma_j = -1\,, \ \operatorname{Tr} \sigma_j = 0\,, \tag{2.0.3}$$

$$[\sigma_j, \sigma_k] = 2\mathrm{i}\epsilon_{jkl}\sigma_l\,. \tag{2.0.4}$$

Z rovností (2.0.3) ihned vyplývá, že všechny Pauliho matice mají dvě vlastní hodnoty $\lambda_\pm = \pm 1$. Příslušné vlastní vektory se značí

$$|x+\rangle \equiv |{\rightarrow}\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad |x-\rangle \equiv |{\leftarrow}\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \tag{2.0.5}$$

$$|y+\rangle \equiv |{\otimes}\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}, \qquad |y-\rangle \equiv |{\odot}\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \end{pmatrix}, \tag{2.0.6}$$

$$|z+\rangle \equiv |{\uparrow}\rangle \equiv |+\rangle \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad |z-\rangle \equiv |{\downarrow}\rangle \equiv |-\rangle \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2.0.7}$$

(první sloupec odpovídá kladným vlastním hodnotám $\lambda_+ = +1$, druhý sloupec záporným vlastním hodnotám $\lambda_- = -1$; j-tý řádek odpovídá matici σ_j).

Vlastní vektory Pauliho matice σ_1 odpovídají spinovému (dvouhladinovému) systémem (qubitu) připravenému podél osy x (analogicky pro σ_2, σ_3 a směry y, z).[1]

2.1 Spin mířící do obecného směru

Mějme zadán jednotkový vektor na kouli (tzv. *Blochově sféře*)

$$\boldsymbol{n} = (n_1, n_2, n_3) = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)\,, \quad |\boldsymbol{n}| = 1\,. \tag{2.1.1}$$

1. V souřadnicích (n_1, n_2, n_3) a (θ, ϕ) vyjádřete matici $\mathsf{s}_{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}$, kde $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ je tzv. *Pauliho vektor*.

2. Určete vlastní hodnoty a vlastní vektory matice $\mathsf{s}_{\boldsymbol{n}}$.

3. Napište maticové vyjádření projektorů $\hat{\mathsf{P}}_{\boldsymbol{n}\pm}$ na podprostory odpovídající vlastním hodnotám $\lambda_\pm$ matice $\mathsf{s}_{\boldsymbol{n}}$.

4. Ukažte, že platí

$$\mathsf{P}_{\boldsymbol{n}\pm} = \frac{1}{2} \pm \mathsf{s}_{\boldsymbol{n}}\,. \tag{2.1.2}$$

[1] Operátor spinu 1/2 je definován vztahem

$$\hat{\mathsf{s}}_j = \frac{\hbar}{2}\sigma_j\,, \tag{2.0.8}$$

splňuje komutační relace $[\hat{\mathsf{s}}_j, \hat{\mathsf{s}}_k] = \mathrm{i}\hbar\epsilon_{jkl}\hat{\mathsf{s}}_l$ a má vlastní hodnoty $s_\pm = \pm\hbar/2$.

Řešení:

1. V kartézských souřadnicích:

$$\mathsf{s}_{\boldsymbol{n}} = n_1\sigma_1 + n_2\sigma_2 + n_3\sigma_3 = \begin{pmatrix} n_3 & n_1 - \mathrm{i}n_2 \\ n_1 + \mathrm{i}n_2 & -n_3 \end{pmatrix} . \tag{2.1.3}$$

   Ve sférických souřadnicích:

$$\mathsf{s}_{\boldsymbol{n}} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}\sin\theta \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} . \tag{2.1.4}$$

2. Vlastní hodnoty:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \cos\theta - \lambda & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}\sin\theta \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\sin\theta & -\cos\theta - \lambda \end{pmatrix} &= 0 \\ -\left(\cos\theta - \lambda\right)\left(\cos\theta + \lambda\right) - \sin^2\theta &= 0 \\ \lambda^2 - \cos^2\theta - \sin^2\theta &= 0 \\ \lambda &= \pm 1 . \end{aligned}$$

   Vlastní vektor příslušející $\lambda = 1$:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \cos\theta & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}\sin\theta \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\sin\theta &= y\left(\cos\theta + 1\right) \\ x &= y\frac{\cos\theta + 1}{\sin\theta}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi} . \end{aligned}$$

   Normalizace:

$$\begin{aligned} 1 &= xx^* + yy^* \\ &= |y|^2 \left[\frac{\cos^2\theta + 2\cos\theta + 1}{\sin^2\theta} + 1\right] \\ &= |y|^2\,\frac{2\cos\theta + 2}{(1 - \cos^2\theta)} \\ &= |y|^2\,\frac{2}{1 - \cos\theta} = \\ &= |y|^2\,\frac{1}{\sin^2\frac{\theta}{2}} , \end{aligned}$$

   takže

$$\begin{aligned} y &= \sin\frac{\theta}{2} , \\ x &= \sin\frac{\theta}{2}\,\mathrm{cotg}\,\frac{\theta}{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}\cos\frac{\theta}{2} , \end{aligned}$$

   a

$$\boxed{|\boldsymbol{n}+\rangle = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}\cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}} . \tag{2.1.5}$$

   Stejně obdržíme i vlastní vektor k vlastní hodnotě $\lambda = -1$:

$$\boxed{|\boldsymbol{n}-\rangle = \begin{pmatrix} -\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}\sin\frac{\theta}{2} \\ \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}} . \tag{2.1.6}$$

3. Vyjdeme z definice projektoru

$$
\begin{aligned}
\hat{\mathsf{P}}_{\boldsymbol{n}+} &\equiv |\boldsymbol{n}+\rangle\,\langle\boldsymbol{n}+| \\
&= \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}\cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\cos\frac{\theta}{2} & \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos^2\frac{\theta}{2} & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} & \sin^2\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \\
&= \boxed{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+\cos\theta & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}\sin\theta \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\sin\theta & 1-\cos\theta \end{pmatrix}}
\end{aligned}
\tag{2.1.7}
$$

$$
\boxed{\hat{\mathsf{P}}_{\boldsymbol{n}-} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1-\cos\theta & -\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}\sin\theta \\ -\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\sin\theta & 1+\cos\theta \end{pmatrix}}
\tag{2.1.8}
$$

O tom, že se jedná vskutku o projektory, se můžeme přesvědčit dokázáním vztahu úplnosti

$$
\hat{\mathsf{P}}_{\boldsymbol{n}+} + \hat{\mathsf{P}}_{\boldsymbol{n}-} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \mathsf{1}
\tag{2.1.9}
$$

a vlastnosti

$$
\hat{\mathsf{P}}^2_{\boldsymbol{n}+} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1+\cos\theta & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}\sin\theta \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\sin\theta & 1-\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1+\cos\theta & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}\sin\theta \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\sin\theta & 1-\cos\theta \end{pmatrix} = \hat{\mathsf{P}}_{\boldsymbol{n}+}\,,
\tag{2.1.10}
$$

$$
\hat{\mathsf{P}}^2_{\boldsymbol{n}-} = \hat{\mathsf{P}}_{\boldsymbol{n}-}\,.
\tag{2.1.11}
$$

4. Vztah (2.1.2) dokážeme porovnáním (2.1.10) a (2.1.11) s (2.1.4).

2.2 Exponenciála Pauliho vektoru

Dokažte, že

$$
\boxed{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})} = \mathsf{1}\cos\phi + \mathrm{i}\,(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})\sin\phi}\,,
\tag{2.2.1}
$$

kde ϕ je reálný parametr.

Řešení:

Nejprve ukážeme, že

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})^2 = \mathsf{s}^2_{\boldsymbol{n}} &= \begin{pmatrix} \cos\theta & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}\sin\theta \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}\sin\theta \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos^2\theta+\sin^2\theta & 0 \\ 0 & \cos^2\theta+\sin^2\theta \end{pmatrix} \\
&= \mathsf{1}\,,
\end{aligned}
$$

z čehož vyplývá, že

$$
(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})^{2n} = \mathsf{1}\,, \qquad (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})^{2n+1} = \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\,.
\tag{2.2.2}
$$

Rozvineme nyní exponenciálu (2.2.1) do řady:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathrm{i}^k}{k!}\phi^k \left(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\right)^k \\
&= 1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\phi^{2k} + \mathrm{i}\left(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\phi^{2k+1} \\
&= 1 \cos\phi + \mathrm{i}\left(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\right)\sin\phi\,.
\end{aligned}
$$

2.3 Funkce Pauliho vektoru

Dokažte, že pro funkci analytickou v bodech $\pm\phi$ platí

$$
\boxed{f\left(\phi\,\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\right) = \frac{f(\phi)+f(-\phi)}{2} + \frac{f(\phi)-f(-\phi)}{2}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}}\,. \tag{2.3.1}
$$

Řešení:

Z příkladu 2.1 víme, že vlastní hodnoty operátoru $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}$ jsou ± 1, takže spektrální rozklad operátoru v argumentu funkce zní

$$
\phi\,\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma} = \phi\hat{\mathsf{P}}_{\boldsymbol{n}+} - \phi\hat{\mathsf{P}}_{\boldsymbol{n}-}\,, \tag{2.3.2}
$$

kde $\hat{\mathsf{P}}_{\boldsymbol{n}\pm}$ jsou projekční operátory na charakteristické podprostory příslušných vlastních hodnot. Podle definice funkce pomocí spektrálního rozkladu operátoru (1.0.5) je tedy

$$
f\left(\phi\,\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\right) = f(\phi)\hat{\mathsf{P}}_{\boldsymbol{n}+} + f(-\phi)\hat{\mathsf{P}}_{\boldsymbol{n}-}\,. \tag{2.3.3}
$$

Nakonec dosadíme vyjádření projekčních operátorů přímo pomocí $\mathsf{s}_{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}$, dané vztahem (2.1.2), a dostaneme

$$
\begin{aligned}
f\left(\phi\,\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\right) &= f(\phi)\left(\frac{1}{2} + \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\right) + f(-\phi)\left(\frac{1}{2} - \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\right) \\
&= \frac{f(\phi)+f(-\phi)}{2} + \frac{f(\phi)-f(-\phi)}{2}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\,,
\end{aligned}
$$

což jsme měli dokázat.

Můžete si ověřit, že pro $f = \exp$ dostaneme výsledek z předchozího příkladu.

2.4 Dvě částice se spinem $1/2$

Máme dvě rozlišitelné částice se spinem $1/2$ a měřitelnou veličinu odpovídající operátoru

$$
\hat{\mathsf{A}} = \frac{\omega}{\hbar}\left(\hat{\mathsf{S}}_1^2 - \hat{\mathsf{S}}_2^2\right) \tag{2.4.1}
$$

kde $\hat{\mathsf{s}}_j$ je j-tá složka operátoru celkového spinu

$$
\hat{\mathsf{S}}_j = \frac{\hbar}{2}\left[\sigma_j^{(1)} \otimes 1^{(2)} + 1^{(1)} \otimes \sigma_j^{(2)}\right] \tag{2.4.2}
$$

a σ_j jsou Pauliho matice (horní index v závorce značí, zda operátor působí na Hilbertově prostoru $\mathcal{H}^{(1)}$ první, resp. $\mathcal{H}^{(2)}$ druhé částice).

1. Nalezněte všechny hodnoty, které můžeme naměřit při měření veličiny A.

2. Jaká je pravděpodobnost nalezení jednotlivých hodnot a jaký bude stav systému po měření, pokud před měřením byl připraven ve stavu

$$|\psi\rangle = |x+\rangle^{(1)} \otimes |x+\rangle^{(2)}\,? \tag{2.4.3}$$

3. Jaká je pravděpodobnost nalezení jednotlivých hodnot a jaký bude stav systému po měření, pokud před měřením byl připraven v entanglovaném stavu

$$|\psi'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|x+\rangle^{(1)} \otimes |x-\rangle^{(2)} - |x-\rangle^{(1)} \otimes |x+\rangle^{(2)}\right]? \tag{2.4.4}$$

Řešení:

1. První část úlohy vede na hledání spektra operátoru $\hat{\mathsf{A}}$. Nejprve si vyjádříme operátor celkového spinu $\hat{\mathbf{S}}$. Jednotlivé jeho složky jsou dány maticemi

$$\begin{aligned}
\mathsf{S}_1 &= \frac{\hbar}{2}\left[\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right]\\
&= \frac{\hbar}{2}\left[\begin{pmatrix} 0\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} & 1\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\\ 1\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} & 0\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} & 0\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\\ 0\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} & 1\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\end{pmatrix}\right]\\
&= \frac{\hbar}{2}\left[\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\right]\\
&= \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix},
\end{aligned}\tag{2.4.5}$$

$$\mathsf{S}_2 = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0 & -\mathrm{i} & -\mathrm{i} & 0\\ \mathrm{i} & 0 & 0 & -\mathrm{i}\\ \mathrm{i} & 0 & 0 & -\mathrm{i}\\ 0 & \mathrm{i} & \mathrm{i} & 0\end{pmatrix}, \qquad \mathsf{S}_3 = \hbar\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, \tag{2.4.6}$$

jejich kvadráty jsou

$$\mathsf{S}_1^2 = \frac{\hbar^2}{4}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, \quad \mathsf{S}_2^2 = \frac{\hbar^2}{4}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, \quad \mathsf{S}_3^2 = \hbar^2\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, \tag{2.4.7}$$

a maticové vyjádření operátoru $\hat{\mathsf{A}}$ má tedy tvar

$$\mathsf{A} = \hbar\omega\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}. \tag{2.4.8}$$

Vlastní čísla λ této matice určíme standardním způsobem,

$$\det(\mathsf{A}-\lambda\mathbb{1}) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 & \hbar\omega \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ \hbar\omega & 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2\left[\lambda^2-(\hbar\omega)^2\right] = 0\,, \qquad (2.4.9)$$

takže operátor $\hat{\mathsf{A}}$ má tři vlastní hodnoty, přičemž jedna je dvakrát degenerovaná:

$$\lambda_{1,2} = 0\,, \quad \lambda_3 = \hbar\omega\,, \quad \lambda_4 = -\hbar\omega\,. \qquad (2.4.10)$$

Odpovídající vlastní vektory v dvourozměrném charakteristickém podprostoru příslušejícím degenerované vlastní hodnotě $\lambda = 0$ musejí být ortonormální, jinak je můžeme zvolit libovolně, například[2]

$$|\phi_1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\,, \qquad |\phi_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\,. \qquad (2.4.12)$$

Vlastní vektory příslušející zbývajícím dvěma vlastním hodnotám jsou určeny (až na komplexní fázi) jednoznačně:

$$|\phi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\,, \qquad |\phi_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\,. \qquad (2.4.13)$$

2. Vektor $|\psi\rangle$ vyjádříme v bázi $\mathcal{B} = \{|\uparrow\uparrow\rangle\,, |\uparrow\downarrow\rangle\,, |\downarrow\uparrow\rangle\,, |\downarrow\downarrow\rangle\}$.[3] Platí, viz (2.0.5),

$$|x+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle\right)\,, \qquad (2.4.15)$$

takže

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\,. \qquad (2.4.16)$$

---

[2] Jiná rovnocenná volba je

$$|\phi_1'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\,, \qquad |\phi_2'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\,. \qquad (2.4.11)$$

[3] Jedná se o zjednodušený zápis $|\uparrow\uparrow\rangle \equiv |\uparrow\rangle^{(1)} \otimes |\uparrow\rangle^{(2)}$ a analogicky u zbylých tří vektorů. Vektory báze mají sloupcové vyjádření

$$|\uparrow\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\,, \quad |\uparrow\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\,, \quad |\downarrow\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\,, \quad |\downarrow\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\,. \qquad (2.4.14)$$

To znamená, že první vektor odpovídá situaci, kdy oba spiny míří ve směru osy z, druhý vektor popisuje stav, kdy první spin míří ve směru osy z, zatímco druhý proti, atd.

Pravděpodobnost naměření jednotlivých hodnot pozorovatelné veličiny A je

$$\begin{aligned} p_{\lambda_{1,2}} &= |\langle\phi_1|\psi\rangle|^2 + |\langle\phi_2|\psi\rangle|^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\,, \\ p_{\lambda_3} &= |\langle\phi_3|\psi\rangle|^2 = \frac{1}{2}\,, \\ p_{\lambda_4} &= |\langle\phi_4|\psi\rangle|^2 = 0\,. \end{aligned} \tag{2.4.17}$$

Kontrolou je, že celková pravděpodobnost vychází 1, což znamená, že s jistotou naměříme aspoň jednu z uvedených vlastních hodnot. Stav systému po měření bude dán příslušnými vlastními vektory.

3. Vektor $|\psi'\rangle$ vyjádřený v bázi $\mathcal{B}$ je

$$\begin{aligned} |\psi'\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\0\end{pmatrix}\,. \end{aligned} \tag{2.4.18}$$

Jednotlivé pravděpodobnosti jsou tedy

$$p_{\lambda_{1,2}} = 1\,, \qquad p_{\lambda_3} = p_{\lambda_4} = 0\,. \tag{2.4.19}$$

2.5 Nekřížení hladin - dvouhladinový systém

Je dána reálná matice

$$\mathsf{H}_0 = \begin{pmatrix} e_1 & 0 \\ 0 & e_2 \end{pmatrix}\,, \tag{2.5.1}$$

jejíž vlastní čísla jsou $e_{1,2} \in$, $e_1 \leq e_2$, a odpovídající normalizované vlastní vektory

$$|\phi_1\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\,, \quad |\phi_2\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\,. \tag{2.5.2}$$

K matici H_0 je přidána „interakce“ ve tvaru

$$\mathsf{H}_\mathrm{I} = \begin{pmatrix} w_1 & v \\ v & w_2 \end{pmatrix}\,, \tag{2.5.3}$$

kde $w_{1,2} \in$, $v \in$.

- Spočítejte vlastní hodnoty E_1, E_2 ($E_1 \leq E_2$) a odpovídající *normalizované* vlastní vektory $|\psi_1\rangle\,, |\psi_2\rangle$ systému popsaného maticí $\mathsf{H} = \mathsf{H}_0 + \mathsf{H}_\mathrm{I}$ a vyjádřete je pomocí veličin

$$\epsilon \equiv \frac{1}{2}\left(e_1 + e_2 + w_1 + w_2\right)\,, \tag{2.5.4}$$

$$\mu \equiv \frac{1}{2}\left(e_2 - e_1 + w_2 - w_1\right)\,. \tag{2.5.5}$$

- Pro speciální případ $w_1 = w_2 = 0$ zakreslete závislost energetických hladin $E_{1,2}$ na parametru v a určete vlastní vektory $|\psi_{1,2}(v)\rangle$ pro (a) $v = 0$, (b) $v \to \pm\infty$.
- Pro speciální případ $e \equiv e_1 = -e_2$, $w \equiv -w_1 = w_2$ zakreslete závislost energetických hladin $E_{1,2}$ na parametru $\mu = e - w$ a určete vlastní vektory $|\psi_{1,2}(\mu)\rangle$ pro (a) $\mu = 0$, (b) $\mu \to \pm\infty$. Uvažujte dva podpřípady: (a) $v = 0$ (křížení hladin) a (b) $v \neq 0$ (hladiny se nekříží).

2.6 Nekřížení hladin - vícehladinový systém

1. Spočítejte vlastní hodnoty $E_{1,2,3}$ a vlastní vektory $|\psi_{1,2,3}\rangle$ matice

$$\mathsf{H} = \mathsf{H}_0 + \mathsf{V}\,, \quad \text{kde} \quad \mathsf{H}_0 = \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}, \quad \mathsf{V} = \begin{pmatrix} 0 & v & v \\ v & 0 & v \\ v & v & 0 \end{pmatrix} \tag{2.6.1}$$

   a načrtněte graf $E_{1,2,3}(v)$.

2. Zobecnění předchozího případu: Určete vlastní hodnoty a vlastní vektory matice H' obecné dimenze n, jejíž složky jsou

$$H'_{jk} = e\delta_{jk} + v\,(1 - \delta_{jk})\,, \tag{2.6.2}$$

   kde δ_{jk} je Kroneckerovo delta.

3. Určete vlastní hodnoty a vlastní vektory tridiagonální matice H'' dimenze n

$$\mathsf{H}'' = \begin{pmatrix} e & v & 0 & 0 & \\ v & e & v & 0 & \\ 0 & v & e & v & \cdots \\ 0 & 0 & v & e & \\ & & \vdots & & \ddots \end{pmatrix}. \tag{2.6.3}$$

Nápověda:

1.

$$\det \begin{pmatrix} x_1 & a & a & a & \\ a & x_2 & a & a & \\ a & a & x_3 & a & \cdots \\ a & a & a & x_4 & \\ & & \vdots & & \ddots \end{pmatrix} = \prod_{j=1}^{n} (x_j - a) + a \sum_{k=1}^{n} \prod_{j \neq k} (x_j - a)\,, \tag{2.6.4}$$

2. Vlastní hodnoty λ_k a (nenormalizované) vlastní vektory $|\xi_k\rangle$ tridiagonální matice

$$\mathsf{T} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \\ & & \vdots & & \ddots \end{pmatrix} \tag{2.6.5}$$

jsou

$$\lambda_k = 2\cos\frac{k\pi}{n+1}, \tag{2.6.6}$$

$$|\xi_k\rangle = \left(\sin\frac{k\pi}{n+1}, \sin\frac{2k\pi}{n+1}, \ldots, \sin\frac{nk\pi}{n+1}\right), \tag{2.6.7}$$

kde $1 \leq k \leq n$ a n je dimenze matice T.