

Cvičení 2

Spektrum operátoru, Pauliho matice, spin

Domácí úkol – Mionium (termín odevzdání: 25.10.2017)

Mionium je vázaný stav (anti-)mionu μ^+ s elektronem, podobný např. atomu vodíku. Vznikne při ozařování vzorku svazkem μ^+ . Miony se interakcí s látkou zpomalují a při dostatečně malé rychlosti zachytí elektron. S ním vytvoří vázaný stav, který se velmi rychle (řádově za $10^{-9}s$, pro srovnání střední doba života μ^+ je $\tau_{\mu^+} = 2.2\mu s$) dostane do základního stavu. Při ozařování slabé fólie kovu je mionium po zachytu elektronu elektricky neutrální a volné a díky tomu může difundovat ven ze vzorku.

Nachází-li se mionium v základním stavu, lze interakci spinu mionu a spinu elektronu popsat Hamiltoniánem

$$\hat{H} = E_0 + A \hat{\mathbf{s}}^{(\mu)} \cdot \hat{\mathbf{s}}^{(e)}, \quad (1)$$

kde $E_0 = -m_r c^2 \alpha^2 / 2$ ($m_r \equiv m_e m_\mu / (m_e + m_\mu)$ je redukovaná hmotnost elektronu a mionu, α je konstanta jemné struktury), A je vazebná konstanta (její hodnotu lze určit teoreticky), $\hat{\mathbf{s}}^{(\mu)}$ je operátor spinu příslušející mionu a $\hat{\mathbf{s}}^{(e)}$ operátor spinu příslušející elektronu, definované na Hilbertově prostoru $\mathcal{H} = \mathcal{H}^{(\mu)} \otimes \mathcal{H}^{(e)}$:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{s}}^{(\mu)} &= \frac{\hbar}{2} \hat{\boldsymbol{\sigma}}^{(\mu)} \otimes \hat{\mathbf{1}}^{(e)} \\ \hat{\mathbf{s}}^{(e)} &= \hat{\mathbf{1}}^{(\mu)} \otimes \frac{\hbar}{2} \hat{\boldsymbol{\sigma}}^{(e)}, \end{aligned}$$

přičemž $\hat{\boldsymbol{\sigma}} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ jsou Pauliho matice.

1. Nalezněte maticové vyjádření operátoru $\hat{\mathbf{s}} \equiv \hat{\mathbf{s}}^{(\mu)} \cdot \hat{\mathbf{s}}^{(e)}$. Spočítejte vlastní hodnoty a vlastní vektory této matice.
2. Ukažte, že vlastní vektory lze označit $|S, S_z\rangle$, kde S je velikost celkového spinu a S_z je projekce spinu složeného systému do směru osy z .
3. Nalezněte vlastní hodnoty (energetické spektrum) Hamiltoniánu \hat{H} .
4. Uvažujte, že spin mionu, kterým ozařujeme vzorek, má orientaci $+$ ve směru osy z , tj. $|\psi_\mu\rangle = |z+\rangle$, spin elektronu má libovolně orientovaný spin $|\psi_e\rangle = \alpha |z+\rangle + \beta |z-\rangle$, $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. Určete pravděpodobnost naměření jednotlivých energií pro stav $|\psi\rangle = |\psi_\mu\rangle \otimes |\psi_e\rangle$.
5. (*Mionium v křemíku*) Pokud se dostatečně silná vrstva krystalu křemíku bombarduje (anti-)miony μ^+ , vznikne mionium a naváže se uvnitř krystalové mříže za tvorby šesterečné struktury s okolními atomy. Interakce mionia s krystalem se dá modelovat Hamiltoniánem

$$\hat{H}' = E_0 + A' \hat{\mathbf{s}}^{(\mu)} \cdot \hat{\mathbf{s}}^{(e)} + D \hat{\mathbf{s}}_3^{(\mu)} \hat{\mathbf{s}}_3^{(e)}, \quad (2)$$

což je rozšířený Hamiltonián volného mionia. Interakce s mříží je popsána druhým a třetím členem, proto je v obecném případě konstanta A' odlišná od konstanty A pro volné mionium. Napište matici Hamiltoniánu \hat{H}' , určete její vlastní hodnoty a příslušné vlastní vektory a pravděpodobnost naměření jednotlivých energií, je-li systém popsán stavem $|\psi\rangle$ z bodu 4.