Cvičení 3

Posunovací operátory, harmonický oscilátor

Domácí úkol – Kvartický oscilátor *(termín odevzdání: 1.11.2017)*

1. V jednorozměrném harmonickém oscilátoru popsaném Hamiltoniánem

$$\hat{\mathsf{H}}_0 = \frac{1}{2M}\hat{\mathsf{p}}^2 + \frac{1}{2}M\Omega^2\hat{\mathsf{x}}^2 \tag{1}$$

spočítejte maticové elementy

$$\left\langle m\middle|\hat{\mathsf{x}}^2\middle|n\right\rangle , \tag{2}$$

$$\left\langle m\middle|\hat{\mathsf{x}}^4\middle|n\right\rangle , \tag{3}$$

kde $|m\rangle$ a $|n\rangle$ jsou dva libovolné vlastní vektory Hamiltoniánu $\hat{\mathsf{H}}_0$.

2. Uvažujte Hamiltonián

$$\hat{\mathsf{H}} = \frac{1}{2M}\hat{\mathsf{p}}^2 + \frac{1}{2}M\Omega^2\hat{\mathsf{x}}^2 + \frac{1}{2}b\hat{\mathsf{x}}^4 = \hat{\mathsf{H}}_0 + \frac{1}{2}b\hat{\mathsf{x}}^4 , \tag{4}$$

kde b je reálný kladný parametr.

- Napočítejte maticové elementy $\mathcal{H}_{mn} = \left\langle m\middle|\hat{\mathsf{H}}\middle|n\right\rangle$ pro $M = \Omega = \hbar = b = 1$.
- Určete numericky diagonalizací matice $\mathcal{H}$ (pomocí programů Mathematica, Maple, Matlab, GNU Octave, Python, knihoven LAPACK, atd.) základní stav E_0 a první tři vzbuzené hladiny $E_{1,2,3}$ Hamiltoniánu $\hat{\mathsf{H}}$. Uvažujte pouze konečný počet elementů báze, tj. $m, n = 0, 1, \ldots, N$.
- Zakreslete závislost $E_j(N)$, $j = 0, 1, 2, 3$ pro $N < 30$.
- Odhadněte, zda stačí velikost matice $N = 30$, pokud hledáme tyto čtyři nejnižší energie s přesností na pět platných cifer.

3. Uvažujte Hamiltonián

$$\hat{\mathsf{H}}' = \frac{1}{2M}\hat{\mathsf{p}}^2 - \frac{1}{2}a\hat{\mathsf{x}}^2 + \frac{1}{2}b\hat{\mathsf{x}}^4 , \tag{5}$$

kde $a > 0$, $b > 0$.

- Zakreslete klasický potenciál.
- Vypočítejte numericky první čtyři energetické hladiny pro $\hbar = 0.03$, $M = a = b = 1$. Volte matice rozměru alespoň $N = 30$.
- Zamyslete se a diskutujte, jaký vliv má volba $\hbar$ na výsledné spektrum.
- Proč jsou hladiny (E_0, E_1) a (E_2, E_3) v téměř degenerovaných dubletech?

Poznámka: Dvoujámový systém popsaný Hamiltoniánem $\hat{\mathsf{H}}'$ se požívá například k modelování amoniakového maseru, k modelování systémů ochlazených iontů používaných v teorii kvantové informace, při studiu kvantových fázových přechodů nebo v kvantové chemii.