

Cvičení 4

Křivočaré souřadnice

Domácí úkol – Hypersférické souřadnice (*termín odevzdání: 9.11.2017*)

Pro hypersférické souřadnice v prostoru o dimenzi d definované vztahy

$$\begin{aligned}x_1 &= r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cdots \sin \theta_{d-2} \cos \theta_{d-1} \\x_2 &= r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cdots \sin \theta_{d-2} \sin \theta_{d-1} \\x_3 &= r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cdots \cos \theta_{d-2} \\&\vdots \\x_{d-1} &= r \sin \theta_1 \cos \theta_2 \\x_d &= r \cos \theta_1,\end{aligned}\tag{1}$$

kde $0 < r < \infty$, $0 \leq \theta_j < \pi$, $j = 1, \dots, d-2$ a $0 \leq \theta_{d-1} < 2\pi$, vyjádřete:

- elementy metrického tenzoru g_{ij} ,
- determinant metrického tenzoru $\det \mathbf{g}$,
- Laplaceův operátor Δ .

Dá se ukázat, že Laplaceův operátor Δ lze rozložit na součet radiální části (závisí jen na souřadnici r) a části $-\frac{L_d^2}{\hbar^2 r^2}$ (centrifugální člen), kde L_d^2 je velikost zobecněného impulsmomentu. Vlastí hodnoty L_d^2 jsou $\lambda_d = \hbar^2 l_d(l_d + d - 2)$, kde $l_d = 0, 1, \dots$.

- Napište Schrödingerovu rovnici pro radiální část vlnové funkce $u_{l_d}(r)$ pro sféricky symetrický potenciál $V(r)$ v d dimenzích.
- Napište Schrödingerovu rovnici pro radiální část vlnové funkce $f_{l_d}(r)$ po substituci

$$u_{l_d}(r) = r^{\frac{1-d}{2}} f_{l_d}(r)\tag{2}$$

a ukažte, že její tvar je shodný pro všechny dimenze d a jediný rozdíl je v síle centrifugálního členu.

Porovnejte získané obecné vztahy se známými vztahy pro $d = 3$.