# 5 Skládání momentu hybnosti

Máme dva nezávislé operátory impulsmomentů $\hat{\mathbf{J}}^{(1)}$, $\hat{\mathbf{J}}^{(2)}$, $\left[\hat{\mathbf{J}}^{(1)}, \hat{\mathbf{J}}^{(2)}\right] = 0$, které působí na Hilbertových prostorech $\mathcal{H}^{(1)}$, $\mathcal{H}^{(2)}$. Operátor celkového impulsmomentu označíme[17]

$$\hat{\mathbf{J}} = \hat{\mathbf{J}}^{(1)} + \hat{\mathbf{J}}^{(2)}$$

a působí na Hilbertově prostoru $\mathcal{H} = \mathcal{H}^{(1)} \otimes \mathcal{H}^{(2)}$. Mezi jednotlivými operátory a jejich složkami platí komutační relace

$$\begin{aligned}
\left[\hat{\mathrm{J}}_j, \hat{\mathrm{J}}_k\right] &= \mathrm{i}\epsilon_{jkl}\hat{\mathrm{J}}_J \,, \\
\left[\hat{\mathrm{J}}_j, \hat{\mathbf{J}}^2\right] &= 0 \,, \\
\left[\hat{\mathbf{J}}^2, \hat{\mathbf{J}}^{(1)2}\right] &= \left[\hat{\mathbf{J}}^2, \hat{\mathbf{J}}^{(2)2}\right] = 0 \,, \\
\left[\hat{\mathrm{J}}_j, \hat{\mathbf{J}}^{(1)2}\right] &= \left[\hat{\mathrm{J}}_j, \hat{\mathbf{J}}^{(2)2}\right] = 0 \,.
\end{aligned}$$

Z toho vyplývá, že na prostoru $\mathcal{H}$ můžeme volit za úplnou množinu komutujících operátorů jednu z těchto dvou množin operátorů se svými bázemi:

$$\begin{array}{lcl}
\hat{\mathbf{J}}^{(1)2}, \hat{\mathrm{J}}_3^{(1)}, \hat{\mathbf{J}}^{(2)2}, \hat{\mathrm{J}}_3^{(2)} & \longrightarrow & \{|j_1\, m_1\rangle \otimes |j_2\, m_2\rangle\} \\
\hat{\mathbf{J}}^{(1)2}, \hat{\mathbf{J}}^{(2)2}, \hat{\mathbf{J}}^2, \hat{\mathrm{J}}_3 & \longrightarrow & \{|j_1\, j_2\, j\, m\rangle\}
\end{array}$$

(dále budeme užívat zjednodušené značení $|j_1\, m_1\rangle \otimes |j_2\, m_2\rangle \equiv |j_1\, m_1\rangle\, |j_2\, m_2\rangle$). Platí tedy

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{J}}^{(1)2}\, |j_1 l_2 l m\rangle &= j_1(j_1+1)\, |j_1\, j_2\, j\, m\rangle \;, \\
\hat{\mathbf{J}}^{(2)2}\, |j_1\, j_2\, j\, m\rangle &= j_2(j_2+1)\, |j_1\, j_2\, j\, m\rangle \;, \\
\hat{\mathbf{J}}^2\, |j_1\, j_2\, j\, m\rangle &= j(j+1)\, |j_1\, j_2\, j\, m\rangle \;, \\
\hat{\mathrm{J}}_3\, |j_1\, j_2\, j\, m\rangle &= m\, |j_1\, j_2\, j\, m\rangle \;,
\end{aligned}$$

přičemž kvantová čísla musejí splňovat

$$\boxed{|j_1 - j_2| \le j \le j_1 + j_2 \,, \qquad m_1 + m_2 = m} \,. \tag{5.0.3}$$

Mezi oběma bázemi platí vztah

$$\boxed{|j_1\, j_2\, j\, m\rangle = \sum_{m_1\, m_2} (j_1\, m_1\, j_2\, m_2|j\, m)\, |j_1\, m_1\rangle\, |j_2\, m_2\rangle}$$

kde $(j_1\, m_1\, j_2\, m_2|j\, m)$ jsou *Clebsch-Gordanovy koeficienty*[18].

[17]Formálně správně bychom měli psát

$$\hat{\mathbf{J}} = \hat{\mathbf{J}}^{(1)} \otimes \hat{\mathbf{1}}^{(2)} + \hat{\mathbf{1}}^{(1)} \otimes \hat{\mathbf{J}}^{(2)} \,, \tag{5.0.1}$$

což ve složkách znamená

$$\hat{\mathrm{J}}_j = \hat{\mathrm{J}}_j^{(1)} \otimes \hat{1}^{(2)} + \hat{1}^{(1)} \otimes \hat{\mathrm{J}}_j^{(2)} \,, \qquad j = 1, 2, 3 \,, \tag{5.0.2}$$

ve shodě s již dříve použitým operátorem dvou spinů (2.4.2).

[18]Jiné způsoby zápisu Clebsch-Gordanových koeficientů jsou

$$(j_1\, m_1\, j_2\, m_2|j\, m) = C^{jm}_{j_1\, m_1\, j_2\, m_2} = (j_1\, j_2\, j|m_1\, m_2\, m)$$

## 5.1 Explicitní výpočet C-G koeficientů

Explicitním výpočtem pomocí posunovacích operátorů $\hat{\mathsf{J}}_\pm = \hat{\mathsf{J}}_1 \pm \mathrm{i}\hat{\mathsf{J}}_2$ nalezněte Clebsch-Gordanovy koeficienty pro skládání impulsmomentů $j_1 = j_2 = 1$.

**Řešení:**

Budeme užívat zkrácený zápis

$$\begin{aligned} |j_1\, j_2\, j\, m\rangle &= |1\,1\;j\,m\rangle \to |j\,m\rangle \\ |j_{1,2}\, m_{1,2}\rangle &= |1\, m_{1,2}\rangle \to |m_{1,2}\rangle \end{aligned}$$

Na základě vztahů (5.0.3) víme, že $j \in \{0, 1, 2\}$.

- Začíná se s vektory s nejvyšší váhou:

  $$|2\,2\rangle = |1\rangle\,|1\rangle$$

  (fázi můžeme volit obecně libovolně, jednička je v tzv. *Condon-Shortleyově fázové konvenci*), neboli

  $$(1\,1\,1\,1|2\,2) = 1.$$

- Využijeme posunovacích operátorů $\hat{\mathsf{J}}_\pm$, které splňují vztahy

  $$\boxed{\begin{aligned} \hat{\mathsf{J}}_\pm\,|j\,m\rangle &= \alpha^{(\pm)}(j,m)\,|j\,m\pm 1\rangle\ , \\ \alpha^{(\pm)}(j,m) &= \sqrt{j(j+1) - m(m\pm 1)} \end{aligned}} \tag{5.1.1}$$

  (analogické vztahy platí pro jednotlivé impulsmomenty $\hat{\mathbf{J}}^{(1,2)}$, přičemž $\hat{\mathsf{J}}_\pm = \hat{\mathsf{J}}^{(1)}_\pm + \hat{\mathsf{J}}^{(2)}_\pm$) a aplikujeme $\hat{\mathsf{J}}_-$ na vektor $|2\,2\rangle$:

  $$\begin{aligned} \hat{\mathsf{J}}_-\,|2\,2\rangle &= 2\,|2\,1\rangle\ , \\ \hat{\mathsf{J}}_-\,|1\rangle\,|1\rangle &= \hat{\mathsf{J}}^{(1)}_-\,|1\rangle\,|1\rangle + \hat{\mathsf{J}}^{(2)}_-\,|1\rangle\,|1\rangle \\ &= \sqrt{2}\,(|0\rangle\,|1\rangle + |1\rangle\,|0\rangle)\,. \end{aligned}$$

  Srovnáním dostaneme

  $$|2\,1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(|1\rangle\,|0\rangle + |0\rangle\,|1\rangle)\,,$$

  a tedy

  $$(1\,0\,1\,1|2\,1) = (1\,1\,1\,0|2\,1) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

- Jelikož musí platit $m = m_1 + m_2$, viz (5.0.3) dostáváme

  $$\begin{aligned} (1\,1\,1\,1|2\,1) &= (1\,0\,1\,0|2\,1) = (1\ -1\,1\,0|2\,1) = \\ &= (1\,0\,1\ -1|2\,1) = (1\ -1\,1\ -1|2\,1) = 0\,. \end{aligned}$$

- Další použití posunovacího operátoru dá

$$
\begin{aligned}
\hat{J}_- \left|2\,1\right\rangle &= \sqrt{6}\left|2\,0\right\rangle \,, \\
\hat{J}_- \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|0\right\rangle\left|1\right\rangle + \left|1\right\rangle\left|0\right\rangle\right) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\sqrt{2}\left|-1\right\rangle\left|1\right\rangle + \sqrt{2}\left|0\right\rangle\left|0\right\rangle + \sqrt{2}\left|0\right\rangle\left|0\right\rangle + \sqrt{2}\left|1\right\rangle\left|-1\right\rangle\Big) = \\
&= \left|-1\right\rangle\left|1\right\rangle + 2\left|0\right\rangle\left|0\right\rangle + \left|1\right\rangle\left|-1\right\rangle \,,
\end{aligned}
$$

neboli

$$
\left|2\,0\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(\left|-1\right\rangle\left|1\right\rangle + 2\left|0\right\rangle\left|0\right\rangle + \left|1\right\rangle\left|-1\right\rangle\right) .
$$

Dostáváme tedy Clebsch-Gordanovy koeficienty

$$
\begin{aligned}
(1\ -1\,1\,1|2\,0) = (1\,1\,1\ -1|2\,0) &= \frac{1}{\sqrt{6}} \\
(1\,0\,1\,0|2\,0) &= \frac{2}{\sqrt{6}}.
\end{aligned}
$$

Všechny ostatní koeficienty s $l = 2$, $m = 0$ jsou nulové.

- Opakovanými aplikacemi $\hat{J}_-$ dostaneme

$$
\begin{aligned}
\left|2\ -1\right\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|0\right\rangle\left|-1\right\rangle + \left|-1\right\rangle\left|0\right\rangle\right) \\
\left|2\ -2\right\rangle &= \left|-1\right\rangle\left|-1\right\rangle ,
\end{aligned}
$$

a tedy

$$
\begin{aligned}
(1\,0\,1\ -1|2\ -1) = (1\ -1\,1\,0|2\ -1) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\
(1\ -1\,1\ -1|2\ -2) &= 1.
\end{aligned}
$$

- Hledejme nyní vektor $\left|1\,1\right\rangle$. Tento vektor musí být kolmý na $\left|2\,1\right\rangle$. Označíme-li

$$
\left|1\,1\right\rangle = c_1\left|0\right\rangle\left|1\right\rangle + c_2\left|1\right\rangle\left|0\right\rangle ,
$$

musí být

$$
\begin{aligned}
\left\langle 2\,1|1\,1\right\rangle &= 0 \,, \\
\frac{c_1}{\sqrt{2}} + \frac{c_2}{\sqrt{2}} &= 0 \,.
\end{aligned}
$$

Volme $c_1$, $c_2$ reálné, $|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$ a koeficient u $\left|1\right\rangle\left|0\right\rangle$ kladný (Condon-Shortley). Pak

$$
\left|1\,1\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|1\right\rangle\left|0\right\rangle - \left|0\right\rangle\left|1\right\rangle\right)
$$

a C-G koeficienty jsou

$$
\begin{aligned}
(1\,1\,1\,0|1\,1) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \,, \\
(1\,0\,1\,1|1\,1) &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \,.
\end{aligned}
$$

- Opět použijeme $\hat{J}_-$, čímž dostaneme

$$
\begin{aligned}
|1\,0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1\rangle\,|{-1}\rangle - |{-1}\rangle\,|1\rangle\right)\,,\\
|1\,-1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle\,|{-1}\rangle - |{-1}\rangle\,|0\rangle\right)\,,
\end{aligned}
$$

  takže

$$
\begin{aligned}
(1\,1\,1\,-1|1\,0) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\,,\\
(1\,-1\,1\,1|1\,0) &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\,,\\
(1\,0\,1\,-1|1\,-1) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\,,\\
(1\,-1\,1\,0|1\,-1) &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\,.
\end{aligned}
$$

- Zbývá poslední stav

$$
|0\,0\rangle = d_1\,|1\rangle\,|{-1}\rangle + d_2\,|0\rangle\,|0\rangle + d_3\,|{-1}\rangle\,|1\rangle\,.
$$

  Z podmínek

$$
\langle 2\,0|0\,0\rangle = \langle 1\,0|0\,0\rangle = 0
$$

  dostáváme soustavu rovnic

$$
\begin{aligned}
\frac{d_1}{\sqrt{6}} + \frac{2d_2}{\sqrt{6}} + \frac{d_3}{\sqrt{6}} &= 0\\
\frac{d_1}{\sqrt{2}} - \frac{d_3}{\sqrt{2}} &= 0,
\end{aligned}
$$

  z které vyplývají vztahy

$$
d_1 = d_3 = -d_2.
$$

  Volme

$$
|0\,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(|1\rangle\,|{-1}\rangle - |0\rangle\,|0\rangle + |{-1}\rangle\,|1\rangle\right)\,,
$$

  a tedy

$$
\begin{aligned}
(1\,1\,1\,-1|0\,0) = (1\,-1\,1\,1|0\,0) &= \frac{1}{\sqrt{3}}\\
(1\,0\,1\,0|0\,0) &= -\frac{1}{\sqrt{3}}.
\end{aligned}
$$

Všechny vypočítané Clebsch-Gordanovy koeficienty pro impulsmomenty $j_1 = j_2 = 1$ jsou shrnuty v tabulce 5.1.

| | $j$ | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 0 | 2 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $m$ | +2 | +1 | +1 | 0 | 0 | 0 | -1 | -1 | -2 |
| $m_1$ | $m_2$ | | | | | | | | | |
| +1 | +1 | 1 | | | | | | | | |
| +1 | 0 | | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | | | | | | |
| 0 | +1 | | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ | | | | | | |
| +1 | -1 | | | | $\frac{1}{\sqrt{6}}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | | | |
| 0 | 0 | | | | $\frac{2}{\sqrt{6}}$ | 0 | $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ | | | |
| -1 | +1 | | | | $\frac{1}{\sqrt{6}}$ | $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | | | |
| 0 | -1 | | | | | | | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | |
| -1 | 0 | | | | | | | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ | |
| -1 | -1 | | | | | | | | | 1 |

Tabulka 1: Clebsch-Gordanovy koeficienty pro impulsmomenty $j_1 = j_2 = 1$. Pokud v tabulce není uvedeno žádné číslo, je příslušný C-G koeficient nulový.

**Shrnutí**

Obecný postup výpočtu Clebsch-Gordanových koeficientů je tedy následující:

1. Vezmeme vektor s nejvyšší váhou
$$|j_1, j_2, j = j_1 + j_2, m = j_1 + j_2\rangle = |j_1\, j_1\rangle\, |j_2\, m_2\rangle$$
2. Opakovaně zapůsobíme posunovacím operátorem $\hat{\mathrm{J}}_-$ na obě strany rovnice. Tím nalezneme všechny vektory $|j_1, j_2, j = j_1 + j_2, m\rangle$, kde $m \in \{-(j_1 + j_2), \ldots, j_1 + j_2\}$.
3. Vektor s o jedničku nižším $j = j_1 + j_2 - 1$ a $m = j_1 + j_2 - 1$ najdeme z podmínky ortogonality
$$\langle j_1, j_2, j = j_1 + j_2 - 1, m = j_1 + j_2 - 1 | j_1, j_2, j = j_1 + j_2, m = j_1 + j_2 - 1\rangle = 0\,.$$
V Condon-Shortleyově fázová konvenci je pak koeficient u členu s nejvyšším $m_1$ kladný a reálný.
4. Postupně opakujeme aplikování posunovacího operátoru $\hat{\mathrm{J}}_-$ a ortogonality do té doby, než získáme všechny možné vektory $|j_1\, j_2\, j\, m\rangle$.

## 5.2 Maticová realizace operátoru momentu hybnosti

Nalezněte maticovou realizaci operátoru $\hat{\mathbf{J}}$ pro částici se spinem $j = \frac{3}{2}$.

**Řešení:**

Hilbertův prostor všech stavů je čtyřrozměrný a jeho bázi tvoří vektory $\left|\frac{3}{2}\, m\right\rangle$, kde $m \in \left\{-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right\}$. Operátory $\hat{\mathrm{J}}_j$ budou tedy realizovány maticemi $4 \times 4$.

Přiřaďme si bázi v maticovém prostoru k vektorům $\left|\frac{3}{2}\, m\right\rangle$ následujícím způsobem

$$\left|\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right\rangle \equiv \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \qquad \left|\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right\rangle \equiv \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\left|\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle \equiv \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} \qquad \left|\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right\rangle \equiv \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Jelikož $\hat{\mathsf{J}}_3\,|j\,m\rangle = m\,|j\,m\rangle$, matice $\mathsf{J}_3$ bude diagonální, přičemž na diagonále budou vlastní hodnoty $m$:

$$\mathsf{J}_3 = \begin{pmatrix}\frac{3}{2} & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2}\end{pmatrix}.$$

Pro výpočet $\mathsf{J}_1$ a $\mathsf{J}_2$ využijeme vlastností posunovacích operátorů $\hat{\mathsf{J}}_\pm \equiv \hat{\mathsf{J}}_1 \pm \mathrm{i}\hat{\mathsf{J}}_2$ (5.1.1). Platí

$$\mathsf{J}_- \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} = \alpha^{(-)}\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} = \sqrt{\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}+1\right)-\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}-1\right)}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} = \sqrt{3}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},$$

a podobně

$$\mathsf{J}_- \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} = \alpha^{(-)}\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},$$

$$\mathsf{J}_- \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} = \alpha^{(-)}\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} = \sqrt{3}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix},$$

takže

$$\mathsf{J}_- = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ \sqrt{3} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0\end{pmatrix}, \qquad \mathsf{J}_+ = \mathsf{J}_-^\dagger = \begin{pmatrix}0 & \sqrt{3} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3}\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

a z inverzních vztahů k definici $\hat{\mathsf{J}}_\pm$ dostaneme

$$\mathsf{J}_1 = \frac{\mathsf{J}_+ + \mathsf{J}_-}{2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathsf{J}_2 = \frac{\mathsf{J}_+ - \mathsf{J}_-}{2\mathrm{i}} = \frac{\mathrm{i}}{2}\begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{3} & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -\sqrt{3} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

Přímým výpočtem se lze přesvědčit, že tyto matice splňují komutační relace pro impulsmoment $[\mathsf{J}_j, \mathsf{J}_k] = \mathrm{i}\epsilon_{jkl}\mathsf{J}_l$. Jedná se o čtyřrozměrnou reprezentaci rotační grupy SO(3).