6 Hypergeometrické funkce

Hypergeometrická funkce je řešením obyčejné homogenní diferenciální rovnice 2. řádu[19]

$$\boxed{z(1-z)\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}z^2} + [c - (a+b+1)\,z]\,\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} - abw = 0}\,, \tag{6.0.3}$$

kde $w = w(z)$, $z \in \mathbb{C}$ je nezávisle proměnná a $a, b, c \in \mathbb{C}$ jsou číselné parametry. Tato rovnice má 3 regulární singulární body $(0, 1, \infty)$. Každá homogenní diferenciální rovnice 2. řádu se třemi regulárními singulárními body se dá vhodnými substitucemi převést na tvar (6.0.3).

Dvě lineárně nezávislá řešení rovnice (6.0.3) v okolí počátku $z = 0$ s poloměrem konvergence 1,[20] tj. $|z| < 1$, jsou až na speciální případy[21]

$$w_1(z) = {}_2F_1(a, b, c; z)\ , \tag{6.0.5}$$

$$w_2(z) = z^{1-c}\,{}_2F_1(a-c+1, b-c+1, 2-c; z)\ , \tag{6.0.6}$$

kde ${}_2F_1(a, b, c; z)$ je *hypergeometrická funkce* daná řadou

$$\boxed{{}_2F_1(a, b, c; z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{c_m}{m!} z^m\,,} \tag{6.0.7}$$

s koeficienty rozvoje[22]

$$\boxed{c_m = \frac{a(a+1)\cdots(a+m-1)\,b(b+1)\cdots(b+m-1)}{c(c+1)\cdots(c+m-1)} = \frac{(a)_m (b)_m}{(c)_m}\,,} \tag{6.0.8}$$

kde $(\bullet)_m$ je tzv. *Pochhammerův symbol* (nebo *stoupající faktoriál*) definovaný jako

$$(\bullet)_m = \begin{cases} 1 & m = 0\,, \\ \bullet(\bullet+1)\cdots(\bullet+n-1) & m > 0\,. \end{cases} \tag{6.0.9}$$

---

[19] Jiné ekvivalentní způsoby zápisu jsou

$$\left(z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} + a\right)\left(z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} + b\right) w = \left(z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} + c\right) w'\,, \tag{6.0.1}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}z^2} + \frac{-c + (1+a+b)}{z(z-1)}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} + \frac{ab}{z(z-1)} w = 0\,. \tag{6.0.2}$$

[20] Funkci lze ovšem analyticky prodloužit do celé komplexní roviny s řezem probíhajícím podél reálné osy v intervalu $z \in (1, \infty)$.

[21] Je-li $1 - c \in \mathbb{N}$, pak jsou dvě lineárně nezávislá řešení

$$\begin{aligned} w_1(z) &= {}_2F_1(a, b, c; z)\ , \\ w_2(z) &= G(a, b, c; z) + w_1(z) \ln z\,, \\ G(a, b, c; z) &= z^{1-c} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{d_m}{m!} z^m\,, \end{aligned} \tag{6.0.4}$$

přičemž funkci $G(a, b, c; z)$ je třeba hledat zvlášť.

[22] Označení ${}_2F_1$ zavedl Pochhammer a je zakotveno ve tvaru koeficientů c_m. Obecněji se zavádí *zobecněná hypergeometrická funkce* ${}_rF_s$, která má $r + s$ parametrů, přičemž stoupající faktoriály r parametrů se nacházejí v čitateli a stoupající faktoriály s parametrů ve jmenovateli zlomku c_m. Kromě hypergeometrické funkce ${}_2F_1$ se nejčastěji setkáme s *degenerovanými hyperbolickými funkcemi* ${}_1F_1$, které budou popsány níže.

Důležitá vlastnost je, že pokud a nebo b je nekladné číslo $-n$, $n \in \mathbb{N}_0$, jsou všechny koeficienty $c_m = 0$ pro $m \geq n$. Hypergeometrická funkce se tak redukuje na polynom stupně n, tzv. *Jacobiho polynom*

$$J_n(p,q;z) = {}_2F_1(-n, p+n, q; z) \ . \tag{6.0.10}$$

Identity

Pro hypergeometrickou funkci je známo několik tisíc identit, které lze najít například na stránkách Wolfram nebo Digital Library of Mathematical Functions. Nejběžnější z nich jsou následující,

$$\begin{aligned} {}_2F_1(a,b,c;z) &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}\, {}_2F_1(a,b,a+b-c+1;1-z) \\ &+ \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\,(1-z)^{c-a-b}\ {}_2F_1(c-a,c-b,c-a-b+1;1-z) \ , \end{aligned} \tag{6.0.11}$$

$$\begin{aligned} {}_2F_1(a,b,c;z) &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(b-a)}{\Gamma(b)\Gamma(c-a)}\,(-z)^{-a}\ {}_2F_1\left(a, a-c+1, a-b+1; \frac{1}{z}\right) \\ &\quad + \frac{\Gamma(c)\Gamma(a-b)}{\Gamma(a)\Gamma(c-b)}\,(-z)^{-b}\ {}_2F_1\left(b, b-c+1, b-a+1; \frac{1}{z}\right) \ , \end{aligned} \tag{6.0.12}$$

$${}_2F_1(a,b,c;z) = (1-z)^{-a}\ {}_2F_1\left(a, c-b, c; \frac{z}{z-1}\right) \ , \tag{6.0.13}$$

přičemž první dvě mohou sloužit k prodlužování řešení hypergeometrické funkce za konvergenční oblast $|z| < 1$. Druhá formule navíc určuje asymptotiku hypergeometrické funkce v nekonečnu:

$${}_2F_1(a,b,c;z \to \infty) \to \frac{\Gamma(c)\Gamma(b-a)}{\Gamma(b)\Gamma(c-a)}(-z)^{-a} + \frac{\Gamma(c)\Gamma(a-b)}{\Gamma(a)\Gamma(c-b)}(-z)^{-b} \, . \tag{6.0.14}$$

Speciální případy

$$\ln(1-z) = z\, {}_2F_1(1,1,2;z) \ , \tag{6.0.15}$$

$$(1-z)^{-a} = {}_2F_1(a,b,b;z) \ , \tag{6.0.16}$$

$$\arcsin z = z\, {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}; z^2\right) \ , \tag{6.0.17}$$

$$\arctan z = z\, {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}; -z^2\right) \ . \tag{6.0.18}$$

Degenergovaná hypergeometrická funkce

Degenerovaná hypergeometrická funkce je řešením Kummerovy rovnice

$$\boxed{x\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2} + (c-x)\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} - aw = 0}\,, \tag{6.0.19}$$

kde $w = w(x)$, $x \in \mathbb{C}$ a $a, c \in \mathbb{C}$ jsou parametry. Tuto rovnici formálně dostaneme z rovnice (6.0.3) limitou $b \to \infty$, $z = x/b$. Rovnice má regulární singulární bod $x = 0$ a neregulární singulární bod $x = \infty$, který vznikne splynutím dvou regulárních singulárních bodů $z = 1$ a $z = \infty$ rovnice (6.0.3).

Dvě lineárně nezávislá řešení Kummerovy rovnice jsou

$$u_1(x) = {}_1F_1(a, c; x) \ , \tag{6.0.20}$$

$$u_2(x) = z^{1-c}\, {}_1F_1(a - c + 1, 2 - c; x) \ , \tag{6.0.21}$$

kde ${}_1F_1(a, c; z)$ je *degenerovaná hypergeometrická funkce* (nebo *konfluentní hypergeometrická funkce*) daná řadou

$$\boxed{{}_1F_1(a, c; x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(a)_m}{(c)_m} \frac{x^m}{m!}} \tag{6.0.22}$$

Pokud $1 - c = n \in \mathbb{N}$, řada (6.0.22) není definována. Řešení Kummerovy rovnice je v tom případě

$$u(x) = \lim_{c \to -n} \frac{{}_1F_1(a, c; x)}{\Gamma(c)} = \frac{\Gamma(a + n + 1)}{\Gamma(a)} \frac{x^{n+1}}{(n + 1)!}\, {}_1F_1(a + n + 1, n + 2; x) \ . \tag{6.0.23}$$

Asymptotické chování degenerované hypergeometrické funkce je

$${}_1F_1(a, c; x \to \infty) \to \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi a} \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c - a)} x^{-a} + \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} \mathrm{e}^x\, x^{a-c} \ . \tag{6.0.24}$$

Tato rovnice platí za předpokladu, že $1 - a = n \notin \mathbb{N}$.

Speciální polynomy

Je-li $a = -n$, $n \in \mathbb{N}_0$, degenerovaná hypergeometrická funkce se redukuje na polynom řádu n. Z těchto polynomů jsou nejdůležitější *Hermitovy polynomy*

$$\begin{aligned} H_{2n}(x) &= (-1)^n \frac{(2n)!}{n!}\, {}_1F_1\left(-n, \frac{1}{2}; x^2\right) \ , \\ H_{2n+1}(x) &= (-1)^n \frac{(2n + 1)!}{n!} 2x\, {}_1F_1\left(-n, \frac{3}{2}; x^2\right) \end{aligned} \tag{6.0.25}$$

a *Laguerrovy polynomy*

$$L_n^m(x) = \frac{(n + m)!}{n!m!}\, {}_1F_1(-n, m + 1; z) \ . \tag{6.0.26}$$

Pohyb v centrálním poli

6.1 Nekonečně hluboká nepravoúhlá jáma

Určete energetické spektrum částice o hmotnosti M nacházející se v jednorozměrném potenciálu

$$V(x) = \frac{V_0}{\tan^2 \frac{\pi x}{a}} \ , \qquad 0 < x < a \, , \tag{6.1.1}$$

kde parametry $V_0 > 0$ určuje strmost a $a > 0$ šířku jámy. Nalezněte energii základního stavu a normalizovanou vlnovou funkci.

Řešení:

Cílem je převést Schrödingerovu rovnici pro vlnovou funkci $\psi = \psi(x)$

$$-\frac{\hbar^2}{2M}\psi_{xx} + [V(x) - E]\,\psi = 0 \tag{6.1.2}$$

(značíme zde $\psi_x \equiv \mathrm{d}\psi/\mathrm{d}x$) do tvaru pro hypergeometrickou funkci (6.0.3). K tomu je třeba provést postupně několik substitucí.

1. Nejprve zavedeme bezrozměrnou proměnné souřadnice

   $$\xi \equiv \frac{\pi x}{a} \tag{6.1.3}$$

   a energie

   $$\epsilon = \frac{\pi^2\hbar^2}{2Ma^2}\,, \qquad e \equiv \frac{E}{\epsilon}\,, \qquad v_0 \equiv \frac{V_0}{\epsilon}\,, \qquad v(\xi) \equiv \frac{V(\xi)}{\epsilon} = \frac{v_0}{\tan^2\xi}\,, \tag{6.1.4}$$

   čímž převedeme Schrödingerovu rovnici (6.1.2) na tvar

   $$\psi_{\xi\xi} + [e - v(\xi)]\,\psi = 0\,. \tag{6.1.5}$$

2. Vlnovou funkci budeme hledat ve tvaru

   $$\psi(\xi) = u(\xi)\sin^\alpha\xi\,, \tag{6.1.6}$$

   kde α bude prozatím volný parametr. Zavedeme zjednodušené označení

   $$s \equiv \sin\xi\,, \qquad c \equiv \cos\xi\,. \tag{6.1.7}$$

   První a druhá derivace vlnové funkce pak jsou

   $$\psi_\xi = u_\xi\, s^\alpha + \alpha\, u\, s^{\alpha-1}c\,, \tag{6.1.8}$$

   $$\begin{aligned}\psi_{\xi\xi} &= u_{\xi\xi}\, s^\alpha + 2\alpha\, u_\xi\, s^{\alpha-1}c + \alpha(\alpha-1)\, u\, s^{\alpha-2}\underbrace{c^2}_{1-s^2} - \alpha\, u\, s^\alpha \\ &= u_{\xi\xi}\, s^\alpha + 2\alpha\, u_\xi\, s^{\alpha-1}c + \alpha(\alpha-1)\, u\, s^{\alpha-2} - \alpha^2\, u\, s^\alpha\,.\end{aligned} \tag{6.1.9}$$

   Potenciál rozepíšeme jako

   $$v(x) = v_0\frac{c^2}{s^2} = v_0\frac{1-s^2}{s^2} = \frac{v_0}{s^2} - v_0\,. \tag{6.1.10}$$

   Schrödingerova rovnice (6.1.5) pak zní

   $$u_{\xi\xi}\, s^\alpha + 2\alpha\, u_\xi\, s^{\alpha-1}c - \alpha^2\, u\, s^\alpha + \underbrace{(e+v_0)}_{\nu^2}\, u\, s^\alpha + [\alpha(\alpha-1) - v_0]\, u\, s^\alpha - v_0\, u\, s^{\alpha-2} = 0\,,$$

   a po vydělení výrazem s^α a po přerovnání členů dostaneme

   $$u_{\xi\xi} + 2\alpha\, u_x\,\frac{c}{s} + \left(\nu^2 - \alpha^2\right) u + [\alpha(\alpha-1) - v_0]\, u\, s^{-2} = 0\,. \tag{6.1.11}$$

Konstanta α byla doposud libovolné číslo. Nyní ji zvolíme tak, aby vynulovala člen úměrný s^{-2}. Řešíme tedy rovnici

$$\alpha(\alpha-1)=v_0\,, \tag{6.1.12}$$

jejíž kořeny jsou

$$\alpha_\pm=\frac{1}{2}\left(1\pm\sqrt{4v_0+1}\right)\,. \tag{6.1.13}$$

V následujícím výpočtu budeme uvažovat pouze kořen $\alpha\equiv\alpha_-<0$.

V této fázi dostáváme tedy Schrödingerovu rovnici ve tvaru

$$u_{\xi\xi}+2\alpha\,u_x\,\frac{c}{s}+\left(\nu^2-\alpha^2\right)u=0\,. \tag{6.1.14}$$

3. Zavedeme novou nezávislou proměnnou[23]

$$z=\cos^2\xi=c^2\,, \tag{6.1.16}$$

Jelikož

$$u_\xi\equiv\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\xi}=u_z z_\xi\,, \tag{6.1.17}$$

$$u_{\xi\xi}\equiv\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\xi^2}=\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}z^2}\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\xi}\right)^2+\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}\xi^2}=u_{zz}z_\xi^2+u_z z_{\xi\xi} \tag{6.1.18}$$

a

$$z_\xi=-2sc\,, \tag{6.1.19}$$

$$z_{\xi\xi}=-2\left(c^2-s^2\right)\,, \tag{6.1.20}$$

dostaneme Schrödingerovu rovnici (6.1.14) do tvaru

$$4\,u_{zz}\underbrace{s^2}_{1-z}\underbrace{c^2}_{z}-2\,u_z\underbrace{\left(c^2-s^2\right)}_{2z-1}-4\alpha\,u_z\underbrace{c^2}_{z}+\left(\nu^2-\alpha^2\right)u=0\,, \tag{6.1.21}$$

$$z(1-z)u_{zz}+\left[\frac{1}{2}-(1+\alpha)\,z\right]u_z+\frac{1}{4}\left(\nu^2-\alpha^2\right)=0\,. \tag{6.1.22}$$

Toto je rovnice pro hypergeometrické funkce (6.0.3) s hodnotami parametrů

$$a+b=\alpha\,, \tag{6.1.23}$$

$$ab=\frac{1}{4}\left(\nu^2-\alpha^2\right)\,, \tag{6.1.24}$$

$$c=\frac{1}{2}\,, \tag{6.1.25}$$

---

[23] Správně bychom měli psát substituci ve tvaru

$$\sqrt{z}=\cos\xi\,, \tag{6.1.15}$$

což je narozdíl od (6.1.16) prosté zobrazení převádějící $\xi\in(0,\pi)$ na $\sqrt{z}\in(-1,1)$.

kde z prvních dvou rovnic obdržíme[24]

$$a = \frac{1}{2}(\alpha - \nu) \ , \tag{6.1.28}$$

$$b = \frac{1}{2}(\alpha + \nu) \ . \tag{6.1.29}$$

Dvě lineárně nezávislá řešení diferenciální rovnice (6.1.22) jsou dány hypergeometrickými funkcemi

$$u_1(z) = {}_2F_1\left(\frac{1}{2}(\alpha - \nu), \frac{1}{2}(\alpha + \nu), \frac{1}{2}; z\right) , \tag{6.1.30}$$

$$u_2(z) = \sqrt{z}\, {}_2F_1\left(\frac{1}{2}(\alpha - \nu + 1), \frac{1}{2}(\alpha + \nu + 1), \frac{3}{2}; z\right) . \tag{6.1.31}$$

Nyní budeme studovat konvergenci řešení. Požadujeme, aby v bodě $z = 1$, který odpovídá $x = a$, byla vlnová funkce ψ nulová. K tomu využijeme identitu (6.0.13) postupně na obě dvě lineárně nezávislá řešení.

- Řešení u_1:

$$u_1(z) = (1 - z)^{\frac{1}{2}(\nu - \alpha)}\, {}_2F_1\left(\frac{1}{2}(\alpha - \nu), \frac{1}{2}(1 - \alpha - \nu), \frac{1}{2}; \frac{z}{z - 1}\right) . \tag{6.1.32}$$

Po uvážení substitucí (6.1.6) a (6.1.16)

$$\begin{aligned}\psi_1 &= s^{\alpha} s^{\nu - \alpha}\, {}_2F_1\left(\frac{1}{2}(\alpha - \nu), \frac{1}{2}(1 - \alpha - \nu), \frac{1}{2}; \frac{c^2}{-s^2}\right) \\ &= s^{\nu} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{c_m}{m!} \frac{c^{2m}}{s^{2m}} .\end{aligned} \tag{6.1.33}$$

Pokud nemá řada konečný počet členů, diverguje v bodě $x = 0$ a $x = a$. Abychom divergenci zabránili, musí být buď první, nebo druhý argument hypergeometrické funkce rovný nekladnému celému číslu. Pokud

$$\frac{1}{2}(\alpha - \nu) = -n\,, \ n \in \mathbb{N}_0 \qquad \Longrightarrow \qquad \nu = 2n + \alpha < 2n \tag{6.1.34}$$

(zvolili jsme $\alpha < 0$) takže v tomto případě vlnová funkce konvergovat nebude (v konečné řadě bude vždy víc členů s funkcí $\sin \xi$ ve jmenovateli, než kolik je mocnina v prefaktoru). Naopak pokud uvážíme druhý argument hypergeometrické funkce,

$$\frac{1}{2}(1 - \alpha - \nu) = -n\,, \ n \in \mathbb{N}_0 \qquad \Longrightarrow \qquad \nu = 2n - \alpha + 1 > 2n\,, \tag{6.1.35}$$

[24] Druhé možné řešení této soustavy rovnic je

$$a = \frac{1}{2}(\alpha + \nu) \ , \tag{6.1.26}$$

$$b = \frac{1}{2}(\alpha - \nu) \ , \tag{6.1.27}$$

které však s ohledem na symetrii hypergeometrických funkcí vůči záměně prvního a druhého argumentu dá totožné řešení diferenciální rovnice (6.1.22).

dostaneme dobře konvergující řešení.

Dosadíme-li nyní za $\nu = \sqrt{e + v_0}$, můžeme vyjádřit energii jako

$$E_{n,1} = \epsilon \left[(2n+1)^2 - 2\alpha(2n+1) + \alpha \right] , \quad n \in \mathbb{N}_0 , \tag{6.1.36}$$

kde α je záporný kořen (6.1.13)[25] a ϵ je energetická škála (6.1.4). Odpovídající nenormovaná vlnová funkce v proměnné x zní

$$\psi_{n,1}(x) = \sin^\alpha \frac{\pi x}{a} \, {}_2F_1\left(\alpha - n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \cos^2 \frac{\pi x}{a} \right) . \tag{6.1.37}$$

- Řešení u_2:

  Postupujeme analogicky jako u u_1. Aplikací identity (6.0.13) postupně dostaneme

$$u_2(z) = \sqrt{z}(1-z)^{\frac{1}{2}(\nu-\alpha-1)} \, {}_2F_1\left(\frac{1}{2}(\alpha - \nu + 1), 1 - \frac{1}{2}(\alpha+\nu), \frac{3}{2}; \frac{z}{z-1} \right) , \tag{6.1.38}$$

$$\begin{aligned} \psi_2 &= s^\alpha c s^{\nu-\alpha-1} \, {}_2F_1\left(\frac{1}{2}(\alpha - \nu + 1), 1 - \frac{1}{2}(\alpha+\nu), \frac{3}{2}; \frac{c^2}{-s^2} \right) \\ &= c s^{\nu-1} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{c_m}{m!} \frac{c^{2m}}{s^{2m}} , \end{aligned} \tag{6.1.39}$$

kde ukončení řady pomocí druhého parametru hypergeometrické funkce vede k řešení s požadovanými okrajovými podmínkami,

$$1 - \frac{1}{2}(\alpha + \nu) = -n , \; n \in \mathbb{N}_0 \qquad \Longrightarrow \qquad \nu = 2n + 2 - \alpha , \tag{6.1.40}$$

což vede na kvantovací podmínku pro energie

$$E_{n,2} = \epsilon \left[(2n+2)^2 - 2\alpha(2n+2) + \alpha \right] , \quad n \in \mathbb{N}_0 \tag{6.1.41}$$

a vlnové funkce ve tvaru

$$\psi_{n,2}(x) = \sin^\alpha \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi x}{a} \, {}_2F_1\left(\alpha - n - \frac{1}{2}, n + \frac{3}{2}, \frac{3}{2}; \cos^2 \frac{\pi x}{a} \right) . \tag{6.1.42}$$

Řešení (6.1.36) a (6.1.41) lze zkombinovat dohromady do

$$E_m = \epsilon \left[m^2 - 2\alpha m + \alpha \right] , \quad m \in \mathbb{N} , \tag{6.1.43}$$

přičemž pro m liché je vlnová funkce ve tvaru $\psi_{n=(m-1)/2,1}(x)$ a pro m sudé $\psi_{n=m/2-1,2}(x)$.

Energie základního stavu je

$$E_1 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{4Ma^2} \left(1 - \sqrt{\frac{8Ma^2 V_0}{\pi^2 \hbar^2} + 1} \right) \tag{6.1.44}$$

[25] Pokud bychom zvolili kladný kořen (6.1.13), $\alpha_+ = 1 - \alpha_-$, dobře se chovající řešení by bylo dáno z prvního argumentu hypergeometrické funkce, avšak spektrum bychom dostali zcela stejné (a rovněž i vlnovou funkci).

a odpovídající vlnová funkce

$$\psi_1(x) \equiv \psi_{0,1}(x) = N_1 \sin^\alpha \frac{\pi x}{a} \underbrace{{}_2F_1\left(\alpha - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; z\right)}_{(1-z)^{\frac{1}{2}-\alpha}}$$
$$= N_1 \sin^{1-\alpha} \frac{\pi x}{a}\,, \tag{6.1.45}$$

kde jsme využili znalosti (6.0.16). Normalizační faktor N_1 získáme integrací

$$N_1 = \frac{1}{\sqrt{\int_0^a \sin^{2-2\alpha} \frac{\pi x}{a} \mathrm{d}x}} = \sqrt{\frac{\pi}{a} \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}-\alpha\right)}}\,. \tag{6.1.46}$$

Poznámka:

Pokud $V_0 \to 0$, dostaneme $\alpha \to 0$ a výraz pro energie se zjednoduší na

$$E_m = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2Ma^2} m^2\,, \quad m \in \mathbb{N}\,, \tag{6.1.47}$$

což jsou energie pravoúhlé jámy.

Naopak pro $V_0 \to \infty$ je $\alpha \to -\infty$ a v tom případě dostaneme

$$E_m = \hbar\Omega\left(m - \frac{1}{2}\right)\,, \quad \Omega \equiv \frac{\pi}{a}\sqrt{\frac{2V_0}{M}}\,, \tag{6.1.48}$$

energie harmonického oscilátoru aproximující dno jámy.