

# Cvičení 9

## Grupy a symetrie

**Domácí úkol – Schwingerova realizace grupy SU(2)** (*termín odevzdání: 3.1.2018*)

Jsou zadány dva operátory  $\hat{a}$  a  $\hat{b}$ , které splňují komutační relace pro posunovací operátory harmonického oscilátoru a které mezi sebou navzájem komutují:

$$\begin{aligned} [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] &= [\hat{b}, \hat{b}^\dagger] = 1, \\ [\hat{a}, \hat{b}] &= [\hat{a}^\dagger, \hat{b}^\dagger] = [\hat{a}, \hat{b}^\dagger] = [\hat{a}^\dagger, \hat{b}] = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Pomocí nich se definují operátory

$$\begin{aligned} \hat{J}_1 &= \frac{1}{2} (\hat{b}^\dagger \hat{a} + \hat{a}^\dagger \hat{b}), \\ \hat{J}_2 &= \frac{i}{2} (\hat{b}^\dagger \hat{a} - \hat{a}^\dagger \hat{b}), \\ \hat{J}_3 &= \frac{1}{2} (\hat{a}^\dagger \hat{a} - \hat{b}^\dagger \hat{b}), \\ \hat{j} &= \frac{1}{2} (\hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{b}^\dagger \hat{b}). \end{aligned} \quad (2)$$

1. Ukažte, čemu se rovnají komutační relace  $[\hat{J}_j, \hat{J}_k]$ , kde  $j, k = 1, 2, 3$ .
2. Vyjádřete operátor  $\hat{J}^2 = \hat{J}_1^2 + \hat{J}_2^2 + \hat{J}_3^2$  pomocí operátoru  $\hat{j}$ .
3. Nalezněte vlastní hodnoty operátorů  $\hat{j}$ ,  $\hat{J}^2$  a  $\hat{J}_3$ .