1 Měření

1.1 Ramseyův přístroj

Tento příklad navazuje na příklad 11. cvičení zimního semestru.

Předpokládejme, že na oblasti s vypnutým oscilujícím polem $\boldsymbol{B}_1$ provedeme měření pomocí dvouhladinového systému (například pomocí další částice se spinem 1/2). Namísto Hamiltoniánu

$$\mathsf{H}_0 = -\mu\sigma_3 B_0 \tag{1.1.1}$$

budeme uvažovat Hamiltonián

$$\mathsf{H}_0' = \begin{cases} -\mu B_0 \sigma_3 \otimes (1 + \lambda \mathsf{m}) \,, & \tau \leq t < \tau + T_0 \,, \\ -\mu B_0 \sigma_3 \otimes 1 \,, & \tau + T_0 \leq t < \tau + T \,, \end{cases} \tag{1.1.2}$$

kde

$$\mathsf{m} \equiv \frac{1}{2}(1 - \sigma_1) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} . \tag{1.1.3}$$

Tento Hamiltonián působí na Hilbertově prostoru $\mathcal{H} = \mathcal{H}_s \otimes \mathcal{H}_m$, což je tenzorový součin Hilbertova prostoru $\mathcal{H}_s$ spinu prolétajícího Ramseyovým přístrojem a Hilbertova prostoru $\mathcal{H}_m$ měřícího dvouhladinového systému.

Dobu T_0 zvolíme speciálně jako (při využití notace (11.1.4) zimního semestru)

$$T_0 = \frac{\hbar\pi}{2\mu B_0 \lambda} = \frac{\pi}{\omega_0 \lambda} \,, \tag{1.1.4}$$

což, jak se ukáže během řešení, je doba potřebná k tomu, aby na sebe měřící zařízení přijalo kvantovou informaci o směru prolétavajícího spinu.

1. Nalezněte evoluční operátor $\mathsf{U}_0'(T)$ v oblasti mezi dvěma Ramseyovými zónami.

2. Za počáteční stav měřícího zařízení budeme uvažovat

$$|\phi_i\rangle = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 - \mathrm{i} \\ 1 + \mathrm{i} \end{pmatrix} . \tag{1.1.5}$$

   V případě, že by měřící zařízení byl spin 1/2, ukažte, do jakého směru by mířil.

3. Ukažte, že pro počáteční stav ve tvaru

$$|\psi_i'\rangle = |\psi_i\rangle \otimes |\phi_i\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 - \mathrm{i} \\ 1 + \mathrm{i} \end{pmatrix} \tag{1.1.6}$$

   a koncový stav, ve kterém je spin, který prolétl Ramseyovým zařízením otočený dolů,

$$\left|\psi_f'\right\rangle = |\psi_f\rangle \otimes 1 \tag{1.1.7}$$

   se amplituda pravděpodobnosti dá zapsat ve tvaru

$$A_{(-+)}' \equiv \left\langle \psi_f' \middle| \hat{\mathsf{U}}_F(2\tau + T; 0) \middle| \psi_i' \right\rangle = A_{(-++)} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + A_{(--+)} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} , \tag{1.1.8}$$

   kde $A_{(-++)}$ a $A_{(--+)}$ jsou definovány ve výrazu (11.1.23) zimního semestru.

4. Ukažte, že v pravděpodobnosti $P_{(-+)}'$ vymizí interferenční člen.

Řešení:

1. Nejprve spočítáme evoluční operátor pro

$$\mathsf{h} \equiv -\underbrace{\mu B_0}_{\frac{\hbar\omega_0}{2}} \lambda\, \sigma_3 \otimes \mathsf{m}\,. \tag{1.1.9}$$

   Rozvinutím do řady dostaneme

$$\mathsf{u} \equiv \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\mathsf{h}T_0} = \sum_{j=0}^{\infty} \Bigg(\underbrace{\frac{\mathrm{i}\omega_0\lambda T_0}{2}}_{a}\Bigg)^j \frac{1}{j!}\,(\sigma_3\otimes\mathsf{m})^j\;. \tag{1.1.10}$$

   Platí

$$\sigma_3^2 = \mathsf{1}\,, \tag{1.1.11}$$
$$\mathsf{m}^2 = \mathsf{m}\,, \tag{1.1.12}$$

   takže

$$\begin{aligned}\mathsf{u} &= \mathsf{1} + \sum_{j=0}^{\infty}\frac{a^{2j+1}}{(2j+1)!}\sigma_3\otimes\mathsf{m} + \sum_{j=1}^{\infty}\frac{a^{2j}}{(2j)!}\mathsf{1}\otimes\mathsf{m}\\ &= \mathsf{1}\otimes\mathsf{1} + \left[\mathrm{i}\sigma_3 \sin\frac{\omega_0\lambda T_0}{2} + \mathsf{1}\left(\cos\frac{\omega_0\lambda T_0}{2} - 1\right)\right]\otimes\mathsf{m}\,.\end{aligned} \tag{1.1.13}$$

   Pro speciální volbu T_0 podle (1.1.4) dostaneme

$$\mathsf{u} = \mathsf{1}\otimes\mathsf{1} + (\mathrm{i}\sigma_3 - \mathsf{1})\otimes\mathsf{m}\,. \tag{1.1.14}$$

   Jelikož h komutuje s $\mathsf{H}_0 = -\mu B_0 \sigma_3 \otimes \mathsf{1}$, lze psát

$$\begin{aligned}\mathsf{U}_0'(T) &= \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\mathsf{H}_0 T}\,\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\mathsf{h}T}\\ &= \left[\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\omega_0 T}{2}} & 0\\ 0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega_0 T}{2}}\end{pmatrix}\otimes\mathsf{1}\right]\left[\mathsf{1}\otimes\mathsf{1} + (\mathrm{i}\sigma_3 - \mathsf{1})\otimes\mathsf{m}\right]\\ &= \begin{pmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\omega_0 T}{2}} & 0\\ 0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega_0 T}{2}}\end{pmatrix}\otimes\mathsf{1} - \begin{pmatrix}(1-\mathrm{i})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\omega_0 T}{2}} & 0\\ 0 & (1+\mathrm{i})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega_0 T}{2}}\end{pmatrix}\otimes\mathsf{m}\,.\end{aligned} \tag{1.1.15}$$

2. Lze využít dvou postupů:

   - V příkladu 2.1 zimního semestru jsme ukázali, že normalizovaný vektor spinu orientovaného do směru jednotkového vektoru $\hat{\boldsymbol{n}} = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$ popsaného pomocí sférických úhlů (θ,ϕ) je

$$|\hat{\boldsymbol{n}}\rangle = \begin{pmatrix}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}\cos\frac{\theta}{2}\\ \sin\frac{\theta}{2}\end{pmatrix}\,. \tag{1.1.16}$$

     Poměr složek

$$z = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}\cot\frac{\theta}{2} \tag{1.1.17}$$

     tedy udává úhly (θ,ϕ) (viz stereografická projekce v [1]). V našem případě je

$$z = \frac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} = -\mathrm{i} = (\cos\phi - \mathrm{i}\sin\phi)\cot\frac{\theta}{2}\,, \tag{1.1.18}$$

     takže $\phi = \pi/2$ a $\theta = 0$. To odpovídá projekci spinu podél souřadné osy y.

- Využijeme vyjádření matice hustoty spinového stavu, pro který obecně platí

$$\rho_{\boldsymbol{n}} = |\boldsymbol{n}\rangle \langle \boldsymbol{n}| = \frac{1}{2}\left(1 + \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\right) \tag{1.1.19}$$

($|\boldsymbol{n}| = 1$ pro čistý stav, $|\boldsymbol{n}| < 1$ pro smíšený stav). V našem případě je

$$\begin{aligned}\rho_{\phi_i} = |\phi_i\rangle\langle\phi_i| &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1-\mathrm{i}\\1+\mathrm{i}\end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+\mathrm{i} & 1-\mathrm{i}\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -\mathrm{i}\\ \mathrm{i} & 1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\left(1+\sigma_2\right)\,,\end{aligned} \tag{1.1.20}$$

takže opět dostáváme orientaci podél osy y[1]

3. Při využití (11.1.21) zimního semestru postupně dostaneme

$$\begin{aligned}A'^{(1)}_{(-+)} &= \left[\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}\otimes \mathsf{1}\right]\mathsf{U}'_0(T)\mathsf{U}(\tau;0)\left[\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\otimes|\phi_i\rangle\right]\\
&= \left[\begin{pmatrix}0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega_0 T}{2}}\end{pmatrix}\otimes\mathsf{1} - (1+\mathrm{i})\begin{pmatrix}0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega_0 T}{2}}\end{pmatrix}\otimes\mathsf{m}\right]\mathsf{U}(\tau;0)\left[\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\otimes|\phi_i\rangle\right]\\
&= \left[\begin{pmatrix}0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega_0 T}{2}}\end{pmatrix}\otimes\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} - \frac{1+\mathrm{i}}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{pmatrix}\right)\right]\mathsf{U}(\tau;0)\left[\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\otimes|\phi_i\rangle\right]\\
&= \left[\begin{pmatrix}0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega_0 T}{2}}\end{pmatrix}\otimes\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1-\mathrm{i} & 1+\mathrm{i}\\1+\mathrm{i} & 1-\mathrm{i}\end{pmatrix}\right]\mathsf{U}(\tau;0)\left[\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\otimes|\phi_i\rangle\right]\\
&= A^{(1)}_{(-+)}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1-\mathrm{i} & 1+\mathrm{i}\\1+\mathrm{i} & 1-\mathrm{i}\end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1-\mathrm{i}\\1+\mathrm{i}\end{pmatrix}\\
&= A^{(1)}_{(-+)}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}(1-\mathrm{i})^2+(1+\mathrm{i})^2\\2(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})\end{pmatrix} = A^{(1)}_{(-+)}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\,.\end{aligned} \tag{1.1.21}$$

Obdobně

$$\begin{aligned}A'^{(1)}_{(++)} &= \left[\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\otimes\mathsf{1}\right]\mathsf{U}'_0(T)\mathsf{U}(\tau;0)\left[\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\otimes|\phi_i\rangle\right]\\
&= \left[\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\omega_0 T}{2}} & 0\end{pmatrix}\otimes\mathsf{1} - (1-\mathrm{i})\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\omega_0 T}{2}} & 0\end{pmatrix}\otimes\mathsf{m}\right]\mathsf{U}(\tau;0)\left[\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\otimes|\phi_i\rangle\right]\\
&= \left[\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\omega_0 T}{2}} & 0\end{pmatrix}\otimes\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+\mathrm{i} & 1-\mathrm{i}\\1-\mathrm{i} & 1+\mathrm{i}\end{pmatrix}\right]\mathsf{U}(\tau;0)\left[\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\otimes|\phi_i\rangle\right]\\
&= A^{(1)}_{(++)}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+\mathrm{i} & 1-\mathrm{i}\\1-\mathrm{i} & 1+\mathrm{i}\end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1-\mathrm{i}\\1+\mathrm{i}\end{pmatrix} = A^{(1)}_{(++)}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\,.\end{aligned} \tag{1.1.22}$$

Jelikož 2. Ramseyova oblast nemění spin, pomocí kterého měříme, využijeme přímo vzorce (11.1.22) zimního semestru, což vede na

$$A'_{(-+)} = A^{(2)}_{(-+)}A'^{(1)}_{(++)} + A^{(2)}_{(--)}A'^{(1)}_{(-+)} = A_{(--+)}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + A_{(-++)}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\,. \tag{1.1.23}$$

[1] Platí tedy, že stav $|\phi_i\rangle$ je vlastním stavem matice σ_2.

Výpočet lze provést i jinak. Jelikož na spin, pomocí kterého provádíme měření, působí pouze oblast bez magnetického pole $\boldsymbol{B}_1$, stačí určit

$$
\begin{aligned}
\mathsf{U}_0'(T)\left[\mathsf{1}\otimes|\phi_i\rangle\right] &= \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\omega_0 T}{2}} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega_0 T}{2}} \end{pmatrix} \otimes \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1-\mathrm{i} \\ 1+\mathrm{i} \end{pmatrix} \\
&\quad - \begin{pmatrix} (1-\mathrm{i})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\omega_0 T}{2}} & 0 \\ 0 & (1+\mathrm{i})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega_0 T}{2}} \end{pmatrix} \otimes \underbrace{\left[\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1-\mathrm{i} \\ 1+\mathrm{i} \end{pmatrix}\right]}_{\frac{\mathrm{i}}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}} \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\omega_0 T}{2}}\begin{pmatrix} 1-\mathrm{i} \\ 1+\mathrm{i} \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega_0 T}{2}}\begin{pmatrix} 1-\mathrm{i} \\ 1+\mathrm{i} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\
&\quad - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (\mathrm{i}+1)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\omega_0 T}{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & (\mathrm{i}-1)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega_0 T}{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\omega_0 T}{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega_0 T}{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\omega_0 T}{2}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega_0 T}{2}} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{1.1.24}
$$

Z toho již vyplývají výše uvedené výsledky.

4. Pravděpodobnost překlopení spinu je

$$
\begin{aligned}
A'^{\dagger}_{(-+)}A'_{(-+)} &= \left[A^*_{(--+)}\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} + A^*_{(-++)}\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}\right]\left[A_{(--+)}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + A_{(-++)}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right] \\
&= \left|A_{(-++)}\right|^2 + \left|A_{(--+)}\right|^2 \,.
\end{aligned}
\tag{1.1.25}
$$

Začlenění měřícího přístroje tedy zničí interferenci. Vývoj je však unitární, kvantová informace se přenese na měřící spin.

Poznámka:

Formálně správnější přístup je přes formalismus matice hustoty. Pokud máme přístroj bez měřícího zařízení, bude spin po průletu zařízením ve stavu

$$
|\psi_i(T_F)\rangle = \left(A_{(+++)} + A_{(+-+)}\right)|+\rangle + \left(A_{(-++)} + A_{(--+)}\right)|-\rangle \,, \tag{1.1.26}
$$

kde $T_F \equiv 2\tau + T$, takže matice hustoty bude

$$
\begin{aligned}
\hat{\rho}_i(T_F) &= |\psi_i(T_F)\rangle\,\langle\psi_i(T_F)| \\
&= \begin{pmatrix} \left|A_{(+++)} + A_{(+-+)}\right|^2 & \left(A_{(+++)} + A_{(+-+)}\right)\left(A_{(-++)} + A_{(--+)}\right)^* \\ \left(A_{(+++)} + A_{(+-+)}\right)^*\left(A_{(-++)} + A_{(--+)}\right) & \left|A_{(-++)} + A_{(--+)}\right|^2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{1.1.27}
$$

a pravděpodobnost naměření stavu $|\psi_f\rangle$ je

$$P_{(-+)} = \langle\psi_f|\hat{\rho}_i(T_F)|\psi_f\rangle = \left|A_{(-++)} + A_{(--+)}\right|^2 , \tag{1.1.28}$$

což je výsledek (11.1.24) zimního semestru.

Při zapnutém měřícím přístroji je koncový stav

$$\begin{aligned} |\psi_i(T_F)\rangle =& A_{(+++)} \,|+\rangle \otimes |+\rangle + A_{(+-+)} \,|+\rangle \otimes |-\rangle \\ &+ A_{(-++)} \,|-\rangle \otimes |+\rangle + A_{(--+)} \,|-\rangle \otimes |+\rangle \ , \end{aligned} \tag{1.1.29}$$

Matice hustoty se zapnutým měřícím přístrojem má složky

$$\rho'_{ab,cd}(T_F) = A_{(ab+)} A^*_{(cd+)} \, , \tag{1.1.30}$$

kde první index $a, c \in \{+, -\}$ odpovídá stavu spinu, druhý index $b, d \in \{+, -\}$ měřícímu přístroji.

V koncovém stavu nekoukáme na stav měřícího přístroje, což formálně znamená, že uděláme parciální stopu přes $\mathcal{H}_s$:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}'_s(T_F) &= \mathrm{Tr}_m \, \hat{\rho}'(T_F) \\ &= \langle +|_m \, \hat{\rho}'(T_F) \, |+\rangle_m + \langle -|_m \, \hat{\rho}'(T_F) \, |-\rangle_m \\ &= \begin{pmatrix} \rho'_{++,++}(T_F) + \rho'_{+-,+-}(T_F) & \rho'_{++,-+}(T_F) + \rho'_{+-,--}(T_F) \\ \rho'_{-+,++}(T_F) + \rho'_{--,+-}(T_F) & \rho'_{-+,-+}(T_F) + \rho'_{--,--}(T_F) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \left|A_{(+++)}\right|^2 + \left|A_{(+-+)}\right|^2 & A_{(+++)}A^*_{(+-+)} + A_{(+-+)}A^*_{(--+)} \\ A_{(-++)}A^*_{(+++)} + A_{(--+)}A^*_{(+-+)} & \left|A_{(-++)}\right|^2 + \left|A_{(--+)}\right|^2 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{1.1.31}$$

Hledaná pravděpodobnost je pak

$$P'_{(-+)} = \langle\psi_f|_s \, \rho'_s(T_F) \, |\psi_f\rangle_s = \left|A_{(-++)}\right|^2 + \left|A_{(--+)}\right|^2 , \tag{1.1.32}$$

v souladu s (1.1.25).