12 Systémy nerozlišitelných částic

Pro složené soustavy nerozlišitelných částic je výhodný popis pomocí kreačních a anihilačních operátorů $\hat{\mathsf{a}}_k^\dagger$, $\hat{\mathsf{a}}_k$, které působí na *Fockově prostoru*

$$\mathcal{F} = \mathcal{H}^{(0)} \oplus \mathcal{H}^{(1)} \oplus \mathcal{H}^{(2)} \oplus \cdots$$

($\mathcal{H}^{(n)}$ označuje Hilbertův prostor soustavy n částic, $\mathcal{H}^{(0)}$ obsahuje pouze jeden stav $|0\rangle$, který se běžně nazývá *vakuum*). Normované bázové vektory prostoru $\mathcal{H}^{(n)}$ budeme značit

$$|N_1, N_2, \ldots; N\rangle , \qquad \text{kde} \quad \sum_{k=1}^{\infty} N_k = N$$

je celkový počet částic (N_1 je počet částic v jednočásticovém stavu (orbitalu) $|\phi_k\rangle$), a dají se vytvořit pomocí kreačních operátorů

$$|N_1, N_2, \ldots; N\rangle = \frac{1}{\sqrt{N_1!N_2!\cdots}} \left(\hat{\mathsf{a}}_1^\dagger\right)^{N_1} \left(\hat{\mathsf{a}}_2^\dagger\right)^{N_2} \cdots |0\rangle$$

Schematicky můžeme tedy psát

$$\mathcal{F} = |0\rangle \otimes \hat{\mathsf{a}}_j^\dagger |0\rangle \otimes \hat{\mathsf{a}}_j^\dagger \hat{\mathsf{a}}_k^\dagger |0\rangle \otimes \cdots$$

Kreační operátory přidávají částici, anihilační ubírají:

$$\begin{aligned} \hat{\mathsf{a}}_k^\dagger |N_1, \ldots, N_k, \ldots; N\rangle &= \sqrt{N_k + 1}\, |N_1, \ldots, N_k + 1, \ldots; N + 1\rangle \\ \hat{\mathsf{a}}_k |N_1, \ldots, N_k, \ldots; N\rangle &= \sqrt{N_k}\, |N_1, \ldots, N_k - 1, \ldots; N - 1\rangle \end{aligned}$$

(odmocninové koeficienty plynou z normalizace vektorů). Působení anihilačního operátoru na vakuum dá 0:

$$\hat{\mathsf{a}}_k |0\rangle = 0$$

Vlnové funkce soustavy částic musí být symetrické vůči záměně libovolných dvou nerozlišitených bosonů (částic s celočíselným spinem) a antisymetrické vůči záměně dvou nerozlišitelných fermionů (částic s poločíselným spinem). Toho lze docílit tím, že kreační operátory splňují komutační (bosony) nebo antikomutační (fermiony) relace.

Bosonové kreační a anihilační operátory označíme $\hat{\mathsf{b}}_k^\dagger$, $\hat{\mathsf{b}}_k$. Komutační relace mezi nimi zní

$$\left[\hat{\mathsf{b}}_j, \hat{\mathsf{b}}_k^\dagger\right] = \delta_{jk} , \qquad \left[\hat{\mathsf{b}}_j, \hat{\mathsf{b}}_k\right] = \left[\hat{\mathsf{b}}_j^\dagger, \hat{\mathsf{b}}_k^\dagger\right] = 0 . \tag{12.0.1}$$

Operátor počtu částic ve stavu $|\phi_k\rangle$ a operátor celkového počtu částic jsou

$$\begin{aligned} \hat{\mathsf{N}}_k &= \hat{\mathsf{a}}_k^\dagger \hat{\mathsf{a}}_k , \\ \hat{\mathsf{N}} &= \sum_k \hat{\mathsf{a}}_k^\dagger \hat{\mathsf{a}}_k . \end{aligned}$$

12.1 Gaussovská porucha bosonového systému

Dva nerozlišitelné bosony se pohybují v poli jednorozměrného harmonického oscilátoru

$$\hat{\mathsf{H}}_0 = \frac{1}{2M}\left(\hat{\mathsf{p}}_1^2 + \hat{\mathsf{p}}_2^2\right) + \frac{1}{2}M\Omega^2\left(\hat{\mathsf{x}}_1^2 + \hat{\mathsf{x}}_2^2\right) .$$

Jejich vzájemná interakce je popsána Gausovským Hamiltoniánem

$$\hat{\mathsf{H}}_{\mathrm{I}} = v\,\mathrm{e}^{-\alpha(\hat{\mathsf{x}}_1-\hat{\mathsf{x}}_2)^2}\,,$$

kde v, $\alpha > 0$ jsou reálné parametry.

Uvažujte interakci za malou poruchu a spočítejte do prvního řádu poruchové teorie opravu k energii základního stavu.

Řešení:

Budeme počítat v x-reprezentaci. Jednočásticová vlnová funkce základního stavu je

$$\phi_0(x) = \sqrt[4]{\frac{M\Omega}{2\pi\hbar}}\,\mathrm{e}^{-\frac{M\Omega}{2\hbar}x^2}$$

V případě dvou bosonů musí být vlnová funkce symetrická vůči záměně dvou částic. To splňuje přímo součin

$$\psi_0^{\mathrm{B}}(x_1, x_2) = \phi_0(x_1)\phi_0(x_2) = \sqrt{\frac{M\Omega}{2\pi\hbar}}\,\mathrm{e}^{-\frac{M\Omega}{2\hbar}\left(x_1^2+x_2^2\right)} \tag{12.1.1}$$

Neporušená energie základního stavu soustavy dvou bosonů je

$$E_0^{\mathrm{B}(0)} = 2\hbar\Omega\left(0 + \frac{1}{2}\right) = \hbar\Omega$$

Opravu k energii základního stavu spočítáme jako skalární součin[16]

$$\begin{aligned}
E_0^{\mathrm{B}(1)} &= \iint \psi_0^{\mathrm{B}*}(x_1, x_2)\hat{\mathsf{H}}_{\mathrm{I}}\psi_0^{\mathrm{B}}(x_1, x_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 = \\
&= v\frac{M\Omega}{2\pi\hbar}\iint \mathrm{e}^{-\frac{M\Omega}{\hbar}\left(x_1^2+x_2^2\right)}\,\mathrm{e}^{-\alpha(x_1-x_2)^2}\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 = \\
&= v\frac{M\Omega}{2\pi\hbar}\iint \mathrm{e}^{-\frac{M\Omega}{2\hbar}\left[(x_1+x_2)^2+(x_1-x_2)^2\right]}\,\mathrm{e}^{-\alpha(x_1-x_2)^2}\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 = \\
&= \left|\begin{matrix} X = \frac{x_1+x_2}{2} & \text{Jakobián} \\ x = x_1 - x_2 & \text{transformace je 1}\end{matrix}\right| = \\
&= v\frac{M\Omega}{2\pi\hbar}\int \mathrm{e}^{-\frac{2M\Omega}{\hbar}X^2}\,\mathrm{d}X\int \mathrm{e}^{-\left(\frac{M\Omega}{2\hbar}+\alpha\right)x^2}\,\mathrm{d}x = \\
&= v\frac{M\Omega}{2\pi\hbar}\sqrt{\frac{\pi\hbar}{2M\Omega}}\sqrt{\frac{\pi}{\frac{M\Omega}{2\hbar}+\alpha}} = \\
&= \frac{v}{2}\sqrt{\frac{M\Omega}{M\Omega + 2\hbar\alpha}}
\end{aligned}$$

[16] Transformace k proměnným X, x je speciálním případem přechodu k *Jacobiho souřadnicím* (těžišťový a relativní pohyb). Pro tři částice tato transformace zní

$$\begin{aligned}
y_1 &= x_1 - x_2 \\
y_2 &= \frac{x_1 + x_2}{2} - x_3 \\
y_3 &= \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}
\end{aligned}$$

12.2 Fermionový systém

Zadání je stejné jako v předchozím příkladu 12.1, jen uvažujte fermiony se spinem 1/2. Spočítejte v prvním řádu poruchové teorie opravu k energii základního stavu pro singletní i tripletní spinový stav.

Řešení:

Vlnová funkce dvou stejných fermionů je obecně rovna

$$\psi^{\mathrm{F}}(x_1, x_2) = \phi^{\mathrm{F}}(x_1, x_2)\Sigma_{S\xi}$$

kde $\phi^{\mathrm{F}}(x_1, x_2)$ je prostorová část, $\sigma_{S\xi}$ část spinová. Dva spiny o velikosti 1/2 se složí buď na celkový spin $S = 1$ – tripletní stav –, který je symetrický vůči záměně částic $1 \leftrightarrow 2$, nebo na spin $S = 0$ – singletní stav –, který je vůči záměně antisymetrický. Vlnová funkce systému složeného z fermionů musí být antisymetrická. Z toho vyplývá, že její prostorová část musí být

- symetrická pro singletní stav
- antisymetrická pro tripletní stav.

Prostorová část vlnové funkce pro singletní stav tudíž vypadá stejně jako v případě bosonů (12.1.1)

$$\phi^{\mathrm{F}}_{0,S=0}(x_1, x_2) = \phi_0(x_1)\phi_0(x_2) = \sqrt{\frac{M\Omega}{2\pi\hbar}}\, \mathrm{e}^{-\frac{M\Omega}{2\hbar}\left(x_1^2+x_2^2\right)}$$

a tím pádem také oprava k energii vyjde stejně:

$$E^{\mathrm{F}(1)}_{0,S=0} = \frac{v}{2}\sqrt{\frac{M\Omega}{M\Omega + 2\hbar\alpha}}$$

U prostorové části vlnové funkce stavu tripletního si již nevystačíme s jednočásticovou vlnovou funkcí ψ_0. Antisymetrizovat se dá až součin

$$\phi^{\mathrm{F}}_{0,S=1}(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\phi_0(x_1)\phi_1(x_2) - \phi_1(x_1)\phi_0(x_2)\right],$$

přičemž $\phi_1(x)$ můžeme určit například aplikováním posunovacího operátoru $\hat{\mathsf{a}}^\dagger$ na funkci $\phi_0(x)$

$$\begin{aligned}
\hat{\mathsf{a}}^\dagger &= \sqrt{\frac{M\Omega}{2\hbar}}\left(\hat{\mathsf{x}} + \frac{\mathrm{i}}{M\Omega}\hat{\mathsf{p}}\right) \\
\phi_1(x) &= \sqrt{\frac{M\Omega}{2\hbar}}\left(x - \frac{\hbar}{M\Omega}\frac{\partial}{\partial x}\right)\sqrt[4]{\frac{M\Omega}{2\pi\hbar}}\,\mathrm{e}^{-\frac{M\Omega}{2\hbar}x^2} = \\
&= \phi_0(x)\sqrt{\frac{M\Omega}{2\hbar}}\left(x + \frac{\hbar}{M\Omega}\frac{M\Omega}{\hbar}x\right) \\
&= x\phi_0(x)\sqrt{\frac{2M\Omega}{\hbar}},
\end{aligned}$$

takže

$$\phi^{\mathrm{F}}_{0,S=1}(x_1,x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\phi_0(x_1)x_2\phi_0(x_2)\sqrt{\frac{2M\Omega}{\hbar}} - x_1\phi_0(x_1)\sqrt{\frac{2M\Omega}{\hbar}}\phi_0(x_2)\right]$$
$$= \sqrt{\frac{M\Omega}{\hbar}}\,(x_2 - x_1)\,\phi_0(x_1)\phi_0(x_2)\,.$$

Neporušená hodnota energie je v tomto stavu

$$E^{\mathrm{F}(0)}_{0,S=1} = \hbar\omega\left(0+\frac{1}{2}\right) + \hbar\omega\left(1+\frac{1}{2}\right) = 2\hbar\omega$$

a příspěvek 1. řádu poruchové teorie zní

$$\begin{aligned}
E^{\mathrm{F}(1)}_{0,S=1} &= \iint \psi^{\mathrm{F}*}_{0,S=1}(x_1,x_2)\hat{\mathsf{H}}_{\mathrm{I}}\psi^{\mathrm{F}}_{0,S=1}(x_1,x_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 = \\
&= v\frac{M\Omega}{\hbar}\frac{M\Omega}{2\pi\hbar}\iint (x_1-x_2)^2\,\mathrm{e}^{-\frac{M\Omega}{\hbar}\left(x_1^2+x_2^2\right)}\,\mathrm{e}^{-\alpha(x_1-x_2)^2}\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 = \\
&= \frac{v}{2\pi}\left(\frac{M\Omega}{\hbar}\right)^2\iint (x_1-x_2)^2\,\mathrm{e}^{-\frac{M\Omega}{\hbar}\left(x_1^2+x_2^2\right)}\,\mathrm{e}^{-\alpha(x_1-x_2)^2}\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 = \\
&= \frac{v}{2\pi}\left(\frac{M\Omega}{\hbar}\right)^2\int \mathrm{e}^{-\frac{2M\Omega}{\hbar}X^2}\,\mathrm{d}X\int x^2\,\mathrm{e}^{-\left(\frac{M\Omega}{2\hbar}+\alpha\right)x^2}\,\mathrm{d}x = \\
&= \frac{v}{2\pi}\left(\frac{M\Omega}{\hbar}\right)^2\sqrt{\frac{\pi\hbar}{2M\Omega}}\,\frac{1}{2}\,\frac{\pi}{\frac{M\Omega}{2\hbar}+\alpha}\sqrt{\frac{\pi}{\frac{M\Omega}{2\hbar}+\alpha}} = \\
&= \frac{v}{2}\left(\frac{M\Omega}{M\Omega+2\hbar\alpha}\right)^{3/2}.
\end{aligned}$$

12.3 Kondenzátová střední hodnota

Je zadán bosonový N-částicový kondenzát[17]

$$|B;N\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{N!}}\left(\hat{\mathsf{B}}^\dagger\right)^N|0\rangle$$

kde operátor $\hat{\mathsf{B}}^\dagger$ je vyjádřen lineární kombinací

$$\hat{\mathsf{B}}^\dagger \equiv \sum_k z_z\hat{\mathsf{b}}^\dagger_k$$

a $\hat{\mathsf{b}}^\dagger_k$ bosonové operátory, splňující komutační relace (12.0.1). Komplexní čísla z_k jsou normována:

$$|z|^2 \equiv \sum_k z^*_k z_k = 1$$

Spočítejte střední hodnotu $\left\langle B;N\middle|\hat{\mathsf{H}}\middle|B;N\right\rangle$, kde operátor $\hat{\mathsf{H}}$ je složen z jednočásticové a dvoučásticové části

$$\hat{\mathsf{H}} = \sum_{ij}\epsilon_{ij}\hat{\mathsf{b}}^\dagger_i\hat{\mathsf{b}}_j + \frac{1}{2}\sum_{klmn}v_{klmn}\hat{\mathsf{b}}^\dagger_k\hat{\mathsf{b}}^\dagger_l\hat{\mathsf{b}}_n\hat{\mathsf{b}}_m,$$

přičemž ϵ_{ij}, v_{klmn} jsou komplexní čísla.

[17] Tento příklad je vyřešen a diskutován v učebnici [1].

Řešení:

Naším cílem je prokomutovat všechny anihilační operátory napravo skrz kreační operátory kondenzátu. Jejich působení na stav vakua pak dá nulový příspěvek.

Vyjdeme z

$$\hat{\mathsf{K}}_1 \equiv \left[\hat{\mathsf{b}}_j, \hat{\mathsf{B}}^\dagger\right] = \sum_k z_k \left[\hat{\mathsf{b}}_j, \hat{\mathsf{b}}_k^\dagger\right] = \sum_k z_k \delta_{jk} = z_j$$

a indukcí dostaneme

$$\begin{aligned}\hat{\mathsf{K}}_N \equiv \left[\hat{\mathsf{b}}_j, (\hat{\mathsf{B}}^\dagger)^N\right] &= \\ &= \left[\hat{\mathsf{b}}_j, \hat{\mathsf{B}}^\dagger\right] (\hat{\mathsf{B}}^\dagger)^{N-1} + \hat{\mathsf{B}}^\dagger \left[\hat{\mathsf{b}}_j, (\hat{\mathsf{B}}^\dagger)^{N-1}\right] = \\ &= z_j (\hat{\mathsf{B}}^\dagger)^{N-1} + \hat{\mathsf{B}}^\dagger \hat{\mathsf{K}}_{N-1},\end{aligned}$$

neboli

$$\begin{aligned}\hat{\mathsf{K}}_2 &= z_j \hat{\mathsf{B}}^\dagger + \hat{\mathsf{B}}^\dagger z_j = 2 z_j \hat{\mathsf{B}}^\dagger \\ \hat{\mathsf{K}}_3 &= z_j (\hat{\mathsf{B}}^\dagger)^2 + \hat{\mathsf{B}}^\dagger (2 z_j \hat{\mathsf{B}}^\dagger) = 3 z_j (\hat{\mathsf{B}}^\dagger)^2 \\ &\vdots \\ \hat{\mathsf{K}}_N^\dagger &= N z_j (\hat{\mathsf{B}}^\dagger)^{N-1}.\end{aligned}$$

Působení anihilačního operátoru $\hat{\mathsf{b}}_j$ na kondenzát dává

$$\begin{aligned}\hat{\mathsf{b}}_j \left|B;N\right\rangle &= \frac{1}{\sqrt{N!}} \hat{\mathsf{b}}_j (\hat{\mathsf{B}}^\dagger)^N \left|0\right\rangle = \\ &= \frac{1}{\sqrt{N!}} N z_j (\hat{\mathsf{B}}^\dagger)^{N-1} \left|0\right\rangle + \frac{1}{\sqrt{N!}} (\hat{\mathsf{B}}^\dagger)^N \hat{\mathsf{b}}_j \left|0\right\rangle = \\ &= \frac{N}{\sqrt{N}} z_j \frac{1}{\sqrt{(N-1)!}} (\hat{\mathsf{B}}^\dagger)^{N-1} \left|0\right\rangle = \\ &= z_j \sqrt{N} \left|B; N-1\right\rangle.\end{aligned}$$

Nyní již můžeme vypočítat střední hodnotu Hamiltoniánu:

$$\left\langle B;N \middle| \hat{\mathsf{H}} \middle| B;N \right\rangle = N \sum_{ij} \epsilon_{ij} z_i^* z_j + \frac{N(N-1)}{2} \sum_{klmn} v_{klmn} z_k^* z_l^* z_m z_n$$

Podobně bychom mohli pokračovat a určit kondenzátovou střední hodnotu vícečásticových operátorů.

12.4 Evoluce bosonového kondenzátu

Nechť se soustava N bosonů nachází ve stavu kondenzátu

$$\left|\psi_0; N\right\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{N!}} \left(\hat{\mathsf{b}}_0^\dagger\right)^N \left|0\right\rangle.$$

a systém je popsán jednočásticovým Hamiltoniánem

$$\hat{\mathsf{H}} = \mathcal{E} \left(\hat{\mathsf{B}}^\dagger \hat{\mathsf{b}}_0 + \hat{\mathsf{b}}_0^\dagger \hat{\mathsf{B}}\right),$$

ve kterém $\mathcal{E}$ je reálný parametr udávající škálu energie,

$$\hat{\mathsf{B}}^\dagger \equiv \sum_{k>0} z_k \hat{\mathsf{b}}_k^\dagger$$

(komplexní parametry z_k nyní nemusí být – narozdíl od předchozího příkladu – normovány) a operátory $\hat{\mathsf{b}}_k$, $\hat{\mathsf{b}}_k^\dagger$ splňují bosonové komutační relace (12.0.1).

Nalezněte časový vývoj stavu $|\psi_0(t); N\rangle$.

Řešení:

Hledáme stav

$$|\psi_0(t); N\rangle = \hat{\mathsf{U}}(t)\,|\psi_0; N\rangle\ ,$$

kde

$$\hat{\mathsf{U}}(t) = \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{\mathsf{H}}t}\ .$$

Začneme s jedním bosonem a budeme postupně přidávat další.

- $N = 1$:

$$|\psi_0(t); 1\rangle = \mathrm{e}^{\overbrace{\alpha}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\mathcal{E}t}\left(\hat{\mathsf{B}}^\dagger\hat{\mathsf{b}}_0 + \hat{\mathsf{b}}_0^\dagger\hat{\mathsf{B}}\right)}\,\hat{\mathsf{b}}_0^\dagger\,|0\rangle\ .$$

Využijeme BCH formuli

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{\alpha\hat{\mathsf{X}}}\,\hat{\mathsf{Y}}\,\mathrm{e}^{-\alpha\hat{\mathsf{X}}} &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha^k}{k!}\hat{\mathsf{K}}_n\,,\\ \hat{\mathsf{K}}_0 &= \hat{\mathsf{Y}}\,,\\ \hat{\mathsf{K}}_{k+1} &= \left[\hat{\mathsf{X}}, \hat{\mathsf{K}}_n\right]\ ,\end{aligned}$$

kde

$$\begin{aligned}\hat{\mathsf{X}} &= \hat{\mathsf{B}}^\dagger\hat{\mathsf{b}}_0 + \hat{\mathsf{b}}_0^\dagger\hat{\mathsf{B}}\,,\\ \hat{\mathsf{Y}} &= \hat{\mathsf{b}}_0^\dagger\,.\end{aligned}$$

Dostaneme

$$|\psi_0(t); 1\rangle = \underbrace{\left(\hat{\mathsf{Y}} + \alpha\left[\hat{\mathsf{X}}, \hat{\mathsf{Y}}\right] + \frac{\alpha^2}{2!}\left[\hat{\mathsf{X}}, \left[\hat{\mathsf{X}}, \hat{\mathsf{Y}}\right]\right] + \frac{\alpha^3}{3!}\cdots\right)}_{\hat{\mathsf{Z}}}\underbrace{\mathrm{e}^{\alpha\hat{\mathsf{A}}}\,|0\rangle}_{|0\rangle}\ .$$

Jednotlivé členy přispějí takto:

$$\begin{aligned}\hat{\mathsf{Y}} &= \hat{\mathsf{b}}_0^\dagger\,,\\ \left[\hat{\mathsf{X}}, \hat{\mathsf{Y}}\right] &= \left[\hat{\mathsf{B}}^\dagger\hat{\mathsf{b}}_0 + \hat{\mathsf{b}}_0^\dagger\hat{\mathsf{B}}, \hat{\mathsf{b}}_0^\dagger\right] = \left[\hat{\mathsf{B}}^\dagger\hat{\mathsf{b}}_0, \hat{\mathsf{b}}_0^\dagger\right] = \hat{\mathsf{B}}^\dagger\left[\hat{\mathsf{b}}_0, \hat{\mathsf{b}}_0^\dagger\right] = \hat{\mathsf{B}}^\dagger\,,\\ \left[\hat{\mathsf{X}}, \left[\hat{\mathsf{X}}, \hat{\mathsf{Y}}\right]\right] &= \left[\hat{\mathsf{B}}^\dagger\hat{\mathsf{b}}_0 + \hat{\mathsf{b}}_0^\dagger\hat{\mathsf{B}}, \hat{\mathsf{B}}^\dagger\right] = \hat{\mathsf{b}}_0^\dagger\left[\hat{\mathsf{B}}, \hat{\mathsf{B}}^\dagger\right] = |\boldsymbol{z}|^2\,\hat{\mathsf{b}}_0^\dagger\,,\\ \left[\hat{\mathsf{X}}, \left[\hat{\mathsf{X}}, \left[\hat{\mathsf{X}}, \hat{\mathsf{Y}}\right]\right]\right] &= \left[\hat{\mathsf{B}}^\dagger\hat{\mathsf{b}}_0 + \hat{\mathsf{b}}_0^\dagger\hat{\mathsf{B}}, |\boldsymbol{z}|^2\,\hat{\mathsf{b}}_0^\dagger\right] = |\boldsymbol{z}|^2\,\hat{\mathsf{B}}^\dagger\,,\\ &\cdots\end{aligned}$$

Shrnuto, dostaneme

$$
\begin{aligned}
|\psi_0(t);1\rangle &= \left(\hat{\mathsf{b}}_0^\dagger + \alpha\hat{\mathsf{B}}^\dagger + \alpha^2\frac{|\boldsymbol{z}|^2}{2!}\hat{\mathsf{b}}_0^\dagger + \alpha^3\frac{|\boldsymbol{z}|^2}{3!}\hat{\mathsf{B}}^\dagger + \alpha^4\frac{|\boldsymbol{z}|^4}{4!}\hat{\mathsf{b}}_0^\dagger + \cdots\right)|0\rangle \\
&= \Bigg[\underbrace{\left(1 + \alpha^2\frac{|\boldsymbol{z}|^2}{2!} + \alpha^4\frac{|\boldsymbol{z}|^4}{4!} + \cdots\right)}_{\cosh\alpha|\boldsymbol{z}|}\hat{\mathsf{b}}_0^\dagger + \underbrace{\left(\alpha + \alpha^3\frac{|\boldsymbol{z}|^2}{3!} + \alpha^5\frac{|\boldsymbol{z}|^4}{4!} + \cdots\right)}_{\frac{1}{|\boldsymbol{z}|}\sinh\alpha|\boldsymbol{z}|}\hat{\mathsf{B}}^\dagger\Bigg]|0\rangle \\
&= \left[\hat{\mathsf{b}}_0^\dagger\cosh\alpha\,|\boldsymbol{z}| + \hat{\mathsf{B}}^\dagger\,\frac{\sinh\alpha\,|\boldsymbol{z}|}{|\boldsymbol{z}|}\right]|0\rangle\ .
\end{aligned}
$$

- $N = 2$:

$$
\begin{aligned}
|\psi_0(t);2\rangle = \mathrm{e}^{\alpha\hat{\mathsf{X}}}\,\frac{\hat{\mathsf{Y}}^2}{2!}\,|0\rangle = \frac{\hat{\mathsf{Z}}}{2}\,\mathrm{e}^{\alpha\hat{\mathsf{X}}}\,\hat{\mathsf{Y}}\,|0\rangle = \frac{\hat{\mathsf{Z}}^2}{2}\,\mathrm{e}^{\alpha\hat{\mathsf{X}}}\,|0\rangle = \frac{\hat{\mathsf{Z}}^2}{2}\,|0\rangle \\
= \frac{1}{2}\left[\hat{\mathsf{b}}_0^\dagger\cosh\alpha\,|\boldsymbol{z}| + \hat{\mathsf{B}}^\dagger\,\frac{\sinh\alpha\,|\boldsymbol{z}|}{|\boldsymbol{z}|}\right]^2|0\rangle\ .
\end{aligned}
$$

- Pro obecné N budeme komutovat za využití BCH formule N krát a indukcí dostaneme

$$
\begin{aligned}
|\psi_0(t);N\rangle &= \frac{1}{\sqrt{N!}}\left[\hat{\mathsf{b}}_0^\dagger\cosh\alpha\,|\boldsymbol{z}| + \hat{\mathsf{B}}^\dagger\,\frac{\sinh\alpha\,|\boldsymbol{z}|}{|\boldsymbol{z}|}\right]^N|0\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{N!}}\left[\hat{\mathsf{b}}_0^\dagger\cos\frac{\mathcal{E}t\,|\boldsymbol{z}|}{\hbar} + \mathrm{i}\frac{\hat{\mathsf{B}}^\dagger}{|\boldsymbol{z}|}\,\sin\frac{\mathcal{E}t\,|\boldsymbol{z}|}{\hbar}\right]^N|0\rangle\ .
\end{aligned}
$$

Vektor tedy rotuje v komplexní rovině s frekvencí

$$
\omega \equiv \frac{\mathcal{E}}{\hbar}\,|\boldsymbol{z}|\ .
$$