Cvičení 1

Měření

Domácí úkol – Ramseyův přístroj pro spin 1 *(termín odevzdání: 28.2.2018)*

Částice se spinem 1 a velikostí magnetického momentu μ, popsaná vlnovou funkcí

$$|\psi\rangle(t) = \psi_1(t)\,|{+1}\rangle + \psi_0(t)\,|0\rangle + \psi_{-1}(t)\,|{-1}\rangle = \begin{pmatrix} \psi_1(t) \\ \psi_0(t) \\ \psi_{-1}(t) \end{pmatrix}, \tag{1}$$

kde dolní index určuje projekci spinu na osu z, se pohybuje v zařízení složeném ze tří oblastí. V první oblasti (1. Ramseyova oblast) je zapnuté magnetické pole složené ze stacionární složky $\boldsymbol{B}_0$ směřující podél osy z a rotující složky $\boldsymbol{B}_1(t)$ v rovině (x, y)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{B}_0 &= (0, 0, B_0) \\ \boldsymbol{B}_1(t) &= (B_1 \cos\omega t, -B_1 \sin\omega t, 0) \end{aligned} \tag{2}$$

a částice v ní stráví dobu dobu τ. V druhé oblasti je rotující pole vypnuto a po dobu T se částice pohybuje pouze ve stacionárním poli $\boldsymbol{B}_0$. Poté (2. Ramseyova oblast) je rotující pole zapnuto, a to opět na dobu τ.

1. Matice generující rotace částice se spinem 1 jsou $\mathsf{S}_j^{(1)} = \hbar \mathsf{s}_j$, kde

$$\mathsf{s}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{s}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} & 0 \\ \mathrm{i} & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{s}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

   Ukažte, že tyto matice splňují komutační relace pro moment hybnosti

$$[\mathsf{s}_j, \mathsf{s}_k] = \mathrm{i}\epsilon_{jkl}\mathsf{s}_l\,. \tag{4}$$

   (Matice s_j jsou analogické k Pauliho maticím σ_j popisujícím částici se spinem 1/2.)

2. Dokažte, že pro matice s_j platí $\mathsf{s}_j^{n+2} = \mathsf{s}_j^n$, kde $n \in \mathbb{N}$, a na základě tohoto vztahu nalezněte vyjádření pro exponenciálu

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi(\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\mathsf{s})} = ? \tag{5}$$

   kde $\hat{\boldsymbol{n}}$ je jednotkový vektor určující osu rotace o úhel ϕ a

$$\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \mathsf{s} \equiv \hat{n}_1\mathsf{s}_1 + \hat{n}_2\mathsf{s}_2 + \hat{n}_3\mathsf{s}_3\,. \tag{6}$$

3. Nalezněte složky evolučního operátoru

$$\mathsf{U}(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t \mathsf{s}_3}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Omega t(\hat{\boldsymbol{n}}_\Omega\cdot\mathsf{s})} \tag{7}$$

   kde

$$\Omega = \sqrt{(\omega-\omega_0)^2 + \omega_1^2}\,, \qquad \hat{\boldsymbol{n}}_\Omega = \frac{1}{\Omega}\begin{pmatrix} -\omega_1 \\ 0 \\ \omega-\omega_0 \end{pmatrix}, \qquad \omega_{0,1} = \frac{2\mu}{\hbar}B_{0,1}\,. \tag{8}$$

4. Nalezněte složky evolučního operátoru $\mathsf{U}(t;t_0)$, který vyvíjí systém z času t_0 do času t.

5. Nalezněte složky evolučního operátoru $\mathsf{U}_0(\tau+T;\tau)$ oblasti, kde je vypnuté pole $\boldsymbol{B}_1$.

6. Proces průchodu zařízením složeným z dvou Ramseyových oblastí s mezioblastí s vypnutým polem B_1 je dán evolučním operátorem

$$\mathsf{U}_F = \mathsf{U}(2\tau+T;\tau+T)\mathsf{U}_0(\tau+T;\tau)\mathsf{U}(\tau;0)\,. \tag{9}$$

   Nalezněte složky evolučního operátoru $\mathsf{U}_F^{\mathrm{rez}}$ pro speciální případ $\omega=\omega_0$ (frekvence oscilujícího magnetického pole $\boldsymbol{B}_1$ je v rezonanci s Larmorovou frekvencí ω_0).

7. Nalezněte matici $\mathsf{P}^{\mathrm{rez}}$ se složkami P_{fi}^{rez}, které udávají pravděpodobnosti, že systém připravený na počátku ve stavu s projekcí spinu na osu z $i\in\{1,0,-1\}$, bude po průchodu zařízením ve stavu s projekcí spinu $f\in\{1,0,-1\}$.