2 Dekoherence

2.1 Spin a prostředí

Mějme spinový (dvouhladinový) systém, popsaný Hilbertovým prostorem

$$\mathcal{H}_s = \{|+\rangle, |-\rangle\} \tag{2.1.1}$$

a prostředí

$$\mathcal{H}_e = \{|e_j\rangle, j = 1, 2, \dots\}. \tag{2.1.2}$$

Časový vývoj je dán předpisem

$$\begin{aligned} |+\rangle \otimes |e_j\rangle &\xrightarrow{t} |+\rangle \otimes \left|e_j^{(+)}(t)\right\rangle, \\ |-\rangle \otimes |e_j\rangle &\xrightarrow{t} |-\rangle \otimes \left|e_j^{(-)}(t)\right\rangle, \end{aligned} \tag{2.1.3}$$

$$\tag{2.1.4}$$

kde $\left|e_j^{\pm}(t)\right\rangle \in \mathcal{H}_e$.

Na počátku uvažujme separovaný stav popsaný maticí hustoty

$$\hat{\rho}_{se}(0) = \hat{\rho}_s(0) \otimes \hat{\rho}_e(0), \tag{2.1.5}$$

kde

$$|\psi_i\rangle = \alpha |+\rangle + \beta |-\rangle, \tag{2.1.6}$$

je čistý stav, takže

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_s(0) &= |\psi_i\rangle \langle\psi_i| \\ &= |\alpha|^2 |+\rangle\langle+| + \alpha\beta^* |+\rangle\langle-| + \alpha^*\beta |-\rangle\langle+| + |\beta|^2 |-\rangle\langle-| \\ &= \begin{pmatrix} |\alpha|^2 & \alpha\beta^* \\ \alpha^*\beta & |\beta|^2 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2.1.7}$$

(poslední výraz je maticové vyjádření v bázi $|\pm\rangle$), a

$$\hat{\rho}_e(0) = \sum_j w_j |e_j\rangle\langle e_j| \tag{2.1.8}$$

je obecný smíšený stav prostředí obklopující spin.

1. Určete matici hustoty $\hat{\rho}_{se}(t)$.
2. Určete redukovanou matici hustoty $\hat{\rho}_s(t)$.
3. Spočítejte $\mathrm{Tr}_s\, \hat{\rho}_s^2(t)$.
4. Předpokládejte, že spin na počátku míří ve směru daném jednotkovým vektorem $\hat{\boldsymbol{n}}$. Ukažte, že v průběhu času spin nemůže změnit komponentu ve směru osy z, avšak důsledkem dekoherence mohou vymizet komponenty ve směru os x a y.

Řešení:

1. Rozepíšeme matici hustoty (2.1.5) a využijeme předpisu pro časový vývoj (2.1.4):

$$\hat{\rho}_{se}(t) = \sum_j w_j \Big[|\alpha|^2 \left|+\right\rangle \left\langle+\right| \otimes \left|e_j^{(+)}(t)\right\rangle \left\langle e_j^{(+)}(t)\right| + \alpha\beta^* \left|+\right\rangle \left\langle-\right| \otimes \left|e_j^{(+)}(t)\right\rangle \left\langle e_j^{(-)}(t)\right| \\ + \alpha^*\beta \left|-\right\rangle \left\langle+\right| \otimes \left|e_j^{(-)}(t)\right\rangle \left\langle e_j^{(+)}(t)\right| + |\beta|^2 \left|-\right\rangle \left\langle-\right| \otimes \left|e_j^{(-)}(t)\right\rangle \left\langle e_j^{(-)}(t)\right| \Big] \tag{2.1.9}$$

2. Parciální stopa je

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_s(t) = \mathrm{Tr}_e\, \hat{\rho}_{se}(t) = \sum_k \langle e_k|\hat{\rho}_{se}(t)|e_k\rangle = \\ = |\alpha|^2 \left|+\right\rangle\left\langle+\right| \underbrace{\sum_{jk} w_j \left\langle e_k \middle| e_j^{(+)}(t)\right\rangle \left\langle e_j^{(+)}(t) \middle| e_k\right\rangle}_{1} \\ + \alpha\beta^* \left|+\right\rangle\left\langle-\right| \underbrace{\sum_{jk} w_j \left\langle e_k \middle| e_j^{(+)}(t)\right\rangle \left\langle e_j^{(-)}(t) \middle| e_k\right\rangle}_{\sum_j w_j \left\langle e_j^{(-)}(t)\middle|e_j^{(+)}(t)\right\rangle \equiv D(t)} \\ + \alpha^*\beta \left|-\right\rangle\left\langle+\right| \underbrace{\sum_{jk} w_j \left\langle e_k \middle| e_j^{(-)}(t)\right\rangle \left\langle e_j^{(+)}(t) \middle| e_k\right\rangle}_{\sum_j w_j \left\langle e_j^{(+)}(t)\middle|e_j^{(-)}(t)\right\rangle = D^*(t)} \\ + |\beta|^2 \left|-\right\rangle\left\langle-\right| \underbrace{\sum_{jk} w_j \left\langle e_k \middle| e_j^{(-)}(t)\right\rangle \left\langle e_j^{(-)}(t) \middle| e_k\right\rangle}_{1} \\ = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 & \alpha\beta^* D(t) \\ \alpha^*\beta D^*(t) & |\beta|^2 \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{2.1.10}$$

kde

$$|D(t)| \le \sum_j w_j \left| \left\langle e_j^{(-)}(t) \middle| e_j^{(+)}(t)\right\rangle \right| \le 1 \tag{2.1.11}$$

(využili jsme trojúhelníkovou nerovnost).

3. Umocněním (2.1.10) dostaneme

$$\hat{\rho}_s^2(t) = \begin{pmatrix} |\alpha|^4 + |\alpha|^2 |\beta|^2 |D(t)|^2 & \left(|\alpha|^2 + |\beta|^2\right) \alpha\beta^* D(t) \\ \left(|\alpha|^2 + |\beta|^2\right) \alpha^*\beta D^*(t) & |\beta|^4 + |\alpha|^2 |\beta|^2 |D(t)|^2 \end{pmatrix}. \tag{2.1.12}$$

a stopa pak je

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}_s\, \hat{\rho}_s^2(t) &= |\alpha|^4 + 2|\alpha|^2 \beta^2 |D(t)|^2 + |\beta|^4 \\ &= \left(|\alpha|^2 + |\beta|^2\right) - 2|\alpha|^2 |\beta|^2 \left[1 - |D(t)|^2\right]. \end{aligned} \tag{2.1.13}$$

$\mathrm{Tr}_s\, \hat{\rho}_s^2(t) = 1$, tj. dostaneme čistý stav, pokud $|D(t)| = 1$ (v tom případě musí platit, že $\left|\left\langle e_j^{(-)}(t) \middle| e_j^{(+)}(t)\right\rangle\right| = 1$, tj. $\left|e_j^{(+)}(t)\right\rangle = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} \left|e_j^{(-)}(t)\right\rangle$ pro všechna $j =$

$1, 2, \dots)$ nebo $\alpha\beta = 0$ (to znamená, že spin je na počátku ve vlastním stavu $|+\rangle$ nebo $|-\rangle$). V opačném případě dostaneme stav smíšený.

Pokud je prostředí velké, je $|D(t)|$ obvykle velmi rychle klesající funkce v čase, což plyne z toho, že stavy $\left|e_j^{(+)}(t)\right\rangle$ a $\left|e_j^{(-)}(t)\right\rangle$ se vzdalují a jejich skalární součin se zmenšuje k nule. Z počátečního čistého stavu (2.1.6) dostaneme po čase t smíšený stav popsaný maticí hustoty (2.1.10):

$$\hat{\rho}_s(t) = |\alpha|^2 |+\rangle \langle +| + |\beta|^2 |-\rangle \langle -| \, . \tag{2.1.14}$$

4. Pokud spin na počátku míří ve směru daném jednotkovým vektorem $\hat{\boldsymbol{n}}$, platí

$$|\psi_i\rangle = \underbrace{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi} \cos\frac{\theta}{2}}_{\alpha} |+\rangle + \underbrace{\sin\frac{\theta}{2}}_{\beta} |-\rangle \tag{2.1.15}$$

Funkci $D(t)$ parametrizujeme pomocí velikosti a fáze jako

$$D(t) = |D(t)| \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\chi(t)} \tag{2.1.16}$$

a dosadíme do (2.1.10), čímž dostaneme

$$\hat{\rho}_s(t) = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 & \alpha\beta^* |D(t)| \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\chi(t)} \\ \alpha^*\beta |D(t)| \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\chi(t)} & |\beta|^2 \end{pmatrix} , \tag{2.1.17}$$

Srovnáním s maticí hustoty spinového systému (1.1.19) dostaneme

$$\hat{\rho}_s(t) = \frac{1}{2}\left[\hat{1} + \boldsymbol{n}(t)\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}}\right] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 + n_3(t) & n_1(t) - \mathrm{i}n_2(t) \\ n_1(t) + \mathrm{i}n_2(t) & 1 - n_3(t) \end{pmatrix} \tag{2.1.18}$$

takže

$$\begin{aligned} |\alpha|^2 &= \cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}\left[1 + n_3(t)\right] , \\ \alpha\beta^* |D(t)| \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\chi} &= \sin\frac{\theta}{2} \cos\frac{\theta}{2} \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi} |D(t)| \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\chi} \\ &= \frac{1}{2}\sin\theta \left\{\cos\left[\phi - \chi(t)\right] - \mathrm{i}\sin\left[\phi - \chi(t)\right]\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left[n_1(t) - \mathrm{i}n_2(t)\right] , \end{aligned} \tag{2.1.19}$$

takže

$$\boldsymbol{n}(t) = \begin{pmatrix} |D(t)| \sin\theta \cos\left[\phi - \chi(t)\right] \\ |D(t)| \sin\theta \sin\left[\phi - \chi(t)\right] \\ \cos\theta \end{pmatrix} . \tag{2.1.20}$$

Pro velké časy předpokládáme $|D(t)| \overset{t\to\infty}{\to} 0$, což dá

$$\boldsymbol{n}(t) \approx \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cos\theta \end{pmatrix} . \tag{2.1.21}$$