3 Nestacionární poruchová teorie

Schödingerův, Heisenbergův, Diracův obraz

Mějme systém popsaný Hamiltoniánem $\hat{\mathsf{H}}$, který lze rozložit na část $\hat{\mathsf{H}}_0$ nezávisející na čase a na časově závislou poruchu $\hat{\mathsf{H}}_{\mathrm{I}}$:

$$\hat{\mathsf{H}}(t) = \hat{\mathsf{H}}_0 + \hat{\mathsf{H}}_{\mathrm{I}}(t).$$

Dále mějme v čase t_0 vektor $|\psi(t_0)\rangle$ popisující stav systému, libovolný časově nezávislý operátor $\hat{\mathsf{A}}$ a časově závislý operátor $\hat{\mathsf{B}}(t)$. Fyzikální závěry se nezmění, pokud provedeme unitární transformaci současně stavového vektoru a operátorů, danou unitárním operátorem $\hat{\mathsf{U}}$:

$$\begin{aligned} |\psi'\rangle &= \hat{\mathsf{U}}\,|\psi\rangle\,, \\ \hat{\mathsf{A}}' &= \hat{\mathsf{U}}\hat{\mathsf{A}}\hat{\mathsf{U}}^\dagger\,. \end{aligned}$$

Tuto transformaci můžeme učinit v každém čase t obecně různou. V praxi se užívají tři takovéto tranformace (fyzikálně ekvivalentní obrazy).

1. *Schrödingerův obraz*

   $$|\psi(t)\rangle = \hat{\mathsf{U}}(t,t_0)\,|\psi(t_0)\rangle \qquad \hat{\mathsf{A}},\ \hat{\mathsf{B}}(t)$$

   Operátor $\hat{\mathsf{A}}$ zůstává v čase konstantní, operátor $\hat{\mathsf{B}}(t)$ se mění v čase podle svého funkčního předpisu.

   Diferenciální rovnice (spolu s počáteční podmínkou) pro evoluční operátor $\hat{\mathsf{U}}(t,t_0)$:

   $$\mathrm{i}\hbar\,\frac{\partial\hat{\mathsf{U}}(t,t_0)}{\partial t} = \hat{\mathsf{H}}(t)\,\hat{\mathsf{U}}(t,t_0)\,, \qquad\qquad \hat{\mathsf{U}}(t_0,t_0) = \hat{\mathsf{1}}\,,$$

   která má v případě, že celkový Hamiltonián $\hat{\mathsf{H}}$ nezávisí na čase, řešení

   $$\hat{\mathsf{U}}(t,t_0) = \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{\mathsf{H}}(t-t_0)}\,.$$

   Z evoluční rovnice pro evoluční operátor plyne rovnice pro stavový vektor (*časová Schrödingerova rovnice*)

   $$\mathrm{i}\hbar\,\frac{\partial\,|\psi(t)\rangle}{\partial t} = \hat{\mathsf{H}}(t)\,|\psi(t)\rangle\,.$$

2. *Heisenbergův obraz*

   $$\begin{aligned} \left|\psi^{\mathrm{H}}(t;t_1)\right\rangle &= \hat{\mathsf{U}}^\dagger(t,t_1)\,|\psi(t)\rangle = |\psi(t_1)\rangle = konst.\,, \\ \hat{\mathsf{A}}^{\mathrm{H}}(t;t_1) &= \hat{\mathsf{U}}^\dagger(t,t_1)\,\hat{\mathsf{A}}\,\hat{\mathsf{U}}(t,t_1)\,, \\ \hat{\mathsf{B}}^{\mathrm{H}}(t;t_1) &= \hat{\mathsf{U}}^\dagger(t,t_1)\,\hat{\mathsf{B}}(t)\,\hat{\mathsf{U}}(t,t_1)\,. \end{aligned}$$

   (t_1 je vnější parametr). Stavový vektor $|\psi\rangle$ se s časem nemění, veškerý časový vývoj je zahrnut v časové závislosti operátorů.

Diferenciální rovnice pro stavový vektor a pro operátory:

$$\frac{\partial \left|\psi^{\mathrm{H}}(t;t_1)\right\rangle}{\partial t} = 0 \qquad \left|\psi^{\mathrm{H}}(t_1;t_1)\right\rangle = |\psi(t_1)\rangle$$
$$\frac{\partial \hat{\mathsf{A}}^{\mathrm{H}}(t;t_1)}{\partial t} = \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\left[\hat{\mathsf{A}}^{\mathrm{H}}(t;t_1), \hat{\mathsf{H}}^{\mathrm{H}}(t)\right] \qquad \hat{\mathsf{A}}^{\mathrm{H}}(t_1;t_1) = \hat{\mathsf{A}}$$
$$\frac{\partial \hat{\mathsf{B}}^{\mathrm{H}}(t;t_1)}{\partial t} = \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\left[\hat{\mathsf{A}}^{\mathrm{H}}(t;t_1), \hat{\mathsf{H}}^{\mathrm{H}}(t)\right] + \frac{\partial^{\mathrm{H}}_{t_1}\hat{\mathsf{B}}(t)}{\partial t} \qquad \hat{\mathsf{B}}^{\mathrm{H}}(t_1;t_1) = \hat{\mathsf{B}}(t_1)\,,$$

kde jsme definovali

$$\frac{\partial^{\mathrm{H}}_{t_1}\hat{\mathsf{B}}(t)}{\partial t} \equiv \hat{\mathsf{U}}^{\dagger}(t,t_1)\,\frac{\partial \hat{\mathsf{B}}(t)}{\partial t}\,\hat{\mathsf{U}}(t,t_1)\,.$$

Pokud máme systém v časově neproměnném vnějším poli, tj. $\left[\hat{\mathsf{H}}, \hat{\mathsf{U}}(t;t_1)\right] = 0$, pak

$$\hat{\mathsf{H}}^{\mathrm{H}}(t;t_1) = \hat{\mathsf{U}}^{\dagger}(t,t_1)\,\hat{\mathsf{H}}\,\hat{\mathsf{U}}(t,t_1) = \hat{\mathsf{H}}\,.$$

3. *Diracův (interakční) obraz*

$$\left|\psi^{\mathrm{D}}(t;t_1)\right\rangle = \hat{\mathsf{U}}^{\dagger}_0(t;t_1)\,|\psi(t)\rangle$$
$$\hat{\mathsf{A}}^{\mathrm{D}}(t;t_1) = \hat{\mathsf{U}}^{\dagger}_0(t;t_1)\,\hat{\mathsf{A}}\,\hat{\mathsf{U}}_0(t;t_1)$$
$$\hat{\mathsf{B}}^{\mathrm{D}}(t;t_1) = \hat{\mathsf{U}}^{\dagger}_0(t;t_1)\,\hat{\mathsf{B}}(t)\,\hat{\mathsf{U}}_0(t;t_1)$$

Zde

$$\hat{\mathsf{U}}_0(t;t_1) = \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}H_0(t-t_1)}$$

je evoluční operátor Hamiltoniánu $\hat{\mathsf{H}}_0$, tj. řešení diferenciální rovnice

$$\mathrm{i}\hbar\,\frac{\partial \hat{\mathsf{U}}_0(t;t_1)}{\partial t} = \hat{\mathsf{H}}_0\,\hat{\mathsf{U}}_0(t;t_1) \qquad \hat{\mathsf{U}}_0(t_1;t_1) = \hat{1}\,.$$

Bez újmy na obecnosti volíme čas t_1 stejný jako v případě obrazu Heisenbergova. Diferenciální rovnice pro stavový vektor a pro operátory:[2]

$$\mathrm{i}\hbar\,\frac{\partial \left|\psi^{\mathrm{D}}(t;t_1)\right\rangle}{\partial t} = \hat{\mathsf{H}}^{\mathrm{D}}_{\mathrm{I}}(t;t_1)\left|\psi^{\mathrm{D}}(t;t_1)\right\rangle \qquad \left|\psi^{\mathrm{D}}(t_1;t_1)\right\rangle = |\psi(t_1)\rangle$$
$$\frac{\partial \hat{\mathsf{A}}^{\mathrm{D}}(t;t_1)}{\partial t} = \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\left[\hat{\mathsf{A}}^{\mathrm{D}}(t;t_1), \hat{\mathsf{H}}^{\mathrm{D}}_{\mathrm{I}}(t;t_1)\right] \qquad \hat{\mathsf{A}}^{\mathrm{D}}(t_1;t_1) = \hat{\mathsf{A}}$$
$$\frac{\partial \hat{\mathsf{B}}^{\mathrm{D}}(t;t_1)}{\partial t} = \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\left[\hat{\mathsf{B}}^{\mathrm{D}}(t;t_1), \hat{\mathsf{H}}^{\mathrm{D}}_{\mathrm{I}}(t;t_1)\right] + \frac{\partial^{\mathrm{D}}_{t_1}\hat{\mathsf{B}}(t)}{\partial t} \qquad \hat{\mathsf{B}}^{\mathrm{D}}(t_1;t_1) = \hat{\mathsf{B}}(t_1),$$

kde (podobně jako u obrazu Heisenbergova)

$$\frac{\partial^{\mathrm{D}}_{t_1}\hat{\mathsf{B}}(t)}{\partial t} \equiv \hat{\mathsf{U}}^{\dagger}_0(t,t_1)\,\frac{\partial \hat{\mathsf{B}}(t)}{\partial t}\,\hat{\mathsf{U}}_0(t,t_1).$$

[2] Ve shodě s definicí operátoru v Diracově obraze je

$$\hat{\mathsf{H}}^{\mathrm{D}}_{\mathrm{I}}(t;t_1) = \hat{\mathsf{U}}^{\dagger}_0(t;t_1)\hat{\mathsf{H}}_{\mathrm{I}}(t)\hat{\mathsf{U}}_0(t;t_1)\,.$$

Řešení první rovnice, která se v literatuře nazývá *Schwingerova-Tomonagova* a je analogií Schrödingerovy rovnice, lze psát ve tvaru

$$\left|\psi^{\mathrm{D}}(t;t_1)\right\rangle = \hat{\mathsf{S}}(t,t_0;t_1)\left|\psi^{\mathrm{D}}(t_0;t_1)\right\rangle,$$

kde *evoluční operátor v Diracově obraze*

$$\hat{\mathsf{S}}(t,t_0;t_1) = \hat{\mathsf{U}}_0^{\dagger}(t,t_1)\hat{\mathsf{U}}(t,t_0)\hat{\mathsf{U}}_0(t_0,t_1)$$

je řešením diferenciální rovnice

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\hat{\mathsf{S}}(t,t_0;t_1)}{\partial t} = \hat{\mathsf{H}}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{D}}(t;t_1)\hat{\mathsf{S}}(t,t_0;t_1) \qquad \hat{\mathsf{S}}(t_0,t_0;t_1) = \hat{1}\,. \tag{3.0.1}$$

V Heisenbergově i Diracově obrazu se objevuje vnější parametr t_1, který udává čas, ve kterém se operátory i stavové vektory všech tří uvedených obrazů rovnají. Nadále budeme volit $t_1 = 0$ a nebudeme tento parametr ve vzorcích explicitně vypisovat.

Pokud H_0 představuje volný Hamiltonián, pak se zavádějí ještě *Møllerovy operátory*

$$\Omega^{(\pm)} = \lim_{t_0\to\mp\infty}\hat{\mathsf{S}}(0,t_0)$$

a operátor S-matice

$$\hat{\mathsf{S}} = \lim_{\substack{t\to+\infty\\ t_0\to-\infty}}\hat{\mathsf{S}}(t,t_0).$$

Řešení rovnice (3.0.1) lze hledat ve tvaru integrální rovnice, kterou lze vyjádřit ve formě řady[3]

$$\begin{aligned}\hat{\mathsf{S}}(t,t_0) &= \hat{1} - \frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_{t_0}^{t}\hat{\mathsf{H}}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{D}}(t_1)\hat{\mathsf{S}}(t_1,t_0)\mathrm{d}t_1 = \\ &= \hat{1} - \frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_{t_0}^{t}\hat{\mathsf{H}}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{D}}(t_1)\left\{\hat{1} - \frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_{t_0}^{t_1}\hat{\mathsf{H}}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{D}}(t_2)\hat{\mathsf{S}}(t_2,t_0)\mathrm{d}t_2\right\}\mathrm{d}t_1 = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\hat{\mathsf{S}}^{(n)}(t,t_0),\end{aligned} \tag{3.0.2}$$

kde

$$\begin{aligned}\hat{\mathsf{S}}^{(0)} &= \hat{1}\\ \hat{\mathsf{S}}^{(1)} &= \frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_{t_0}^{t}\hat{\mathsf{H}}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{D}}(t_1)\mathrm{d}t_1\\ &\vdots\\ \hat{\mathsf{S}}^{(n)} &= \left(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\right)^n\int_{t_0}^{t}\hat{\mathsf{H}}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{D}}(t_1)\int_{t_0}^{t_1}\hat{\mathsf{H}}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{D}}(t_2)\cdots\int_{t_0}^{t_{n-1}}\hat{\mathsf{H}}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{D}}(t_n)\mathrm{d}t_n\cdots\mathrm{d}t_2\mathrm{d}t_1\end{aligned} \tag{3.0.3}$$

Rozvoj (3.0.2) lze formálně sečíst. Jelikož však Diracovy obrazy Hamiltoniánu v různých časech mezi sebou navzájem nekomutují, $\left[\hat{\mathsf{H}}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{D}}(t_j),\hat{\mathsf{H}}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{D}}(t_k)\right] \neq 0$ pro $t_j \neq t_k$,

[3] Dysonova řada

musíme užít T-součin, definovaný následujícím způsobem: Nechť operátory $\hat{\mathsf{A}}_j(t)$ ve stejném čase komutují, tj. nechť $[A_j(t), A_k(t)] = 0$. Pak

$$\mathsf{T}\left(\hat{\mathsf{A}}_N(t_N)\cdots\hat{\mathsf{A}}_1(t_1)\right) \equiv \hat{\mathsf{A}}_{i_N}(t_{i_N})\cdots\hat{\mathsf{A}}_{i_1}(t_{i_1}) \qquad t_{i_N} \geq t_{i_{N-1}} \geq \cdots \geq t_{i_1}$$

Užitím T-součinu můžeme psát

$$\hat{\mathsf{S}}(t,t_0) = \mathsf{T}\exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_{t_0}^{t}\hat{\mathsf{H}}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{D}}(t')\mathrm{d}t'\right)$$

Nestacionární poruchová teorie

Stejně jako u stacionární poruchové teorie budeme i zde předpokládat, že spektrum Hamiltoniánu $\hat{\mathsf{H}}_0$ známe:

$$\begin{aligned}\hat{\mathsf{H}}_0\left|\phi_m\right\rangle &= E_m^{(0)}\left|\phi_m\right\rangle\\ \left\langle\phi_m|\phi_n\right\rangle &= \delta_{mn}\\ \sum_m\left|\phi_m\right\rangle\left\langle\phi_m\right| &= \hat{1}.\end{aligned}$$

Maticové elementy rozvoje evolučního operátoru v Diracově obraze (3.0.2) v této bázi označíme jako

$$S_{fi}^{(n)}(t,t_0) \equiv \left\langle\phi_f\middle|\hat{\mathsf{S}}^{(n)}(t,t_0)\middle|\phi_i\right\rangle$$

a pro jednotlivé členy (3.0.3) dostaneme

$$\boxed{\begin{aligned}&S_{fi}^{(0)}(t,t_0) = \delta_{fi}\\ &S_{fi}^{(1)}(t,t_0) = -\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_{t_0}^{t}\hat{\mathsf{H}}_{\mathrm{I}fi}(t_1)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{fi}t_1}\,\mathrm{d}t_1\\ &S_{fi}^{(2)}(t,t_0) = \left(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\right)^2\sum_m\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t_1}\hat{\mathsf{H}}_{\mathrm{I}fm}(t_1)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{fm}t_1}\,\hat{\mathsf{H}}_{\mathrm{I}mi}(t_2)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{mi}t_2}\,\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\end{aligned}} \tag{3.0.4}$$

kde jsme zavedli [4]

$$H_{\mathrm{I}fi}(t) \equiv \left\langle\phi_f\middle|\hat{\mathsf{H}}_{\mathrm{I}}(t)\middle|\phi_i\right\rangle \qquad\qquad \omega_{fi} \equiv \frac{1}{\hbar}\left(E_f^{(0)} - E_i^{(0)}\right)$$

Pravděpodobnost přechodu z počátečního stavu $\left|\phi_i\right\rangle$ připraveného v čase t_0 do koncového stavu $\left|\phi_f\right\rangle$ v čase t je

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{i\to f}(t_0\to t) &\equiv \left|\left\langle\phi_f(t)|\phi_i(t_0)\right\rangle\right|^2\\ &= \left|\left\langle\phi_f^{\mathrm{D}}(t)|\phi_i^{\mathrm{D}}(t_0)\right\rangle\right|^2\\ &= \left|\left\langle\phi_f\middle|\hat{\mathsf{S}}(t,t_0)\middle|\phi_i\right\rangle\right|^2\end{aligned}$$

a v poruchové teorii dostáváme

$$\boxed{\mathcal{P}_{i\to f}(t_0\to t) = \left|S_{fi}^{(1)}(t,t_0) + S_{fi}^{(1)}(t,t_0) + S_{fi}^{(2)}(t,t_0) + \cdots\right|^2}$$

[4] Občas budeme používat zjednodušené značení $H_{\mathrm{I}fi}(t) = \left\langle f\middle|\hat{\mathsf{H}}_{\mathrm{I}}(t)\middle|i\right\rangle$.

Pro **časově neproměnnou poruchu** zapnutou v čase t_0 dostaneme do 1. řádu poruchové teorie

$$\mathcal{P}_{i\to f}(t_0 \to t) = \frac{2\pi}{\hbar} \left|H_{\mathrm{I}fi}\right|^2 \delta_{\Delta t}(\omega_{fi})\Delta t \tag{3.0.5}$$

kde $\Delta t = t - t_0$ a

$$\delta_{\Delta t}(\omega_{fi}) \equiv \frac{1}{\pi}\frac{\sin^2\frac{\omega_{fi}\Delta t}{2}}{\frac{\omega_{fi}^2\Delta t}{2}} \xrightarrow{\Delta t\to\infty} \delta(\omega_{kj})$$

je funkce, která má v okolí nuly ostré maximum pološířky $\simeq 2\pi\Delta t$ a výšky $\Delta t/2\pi$. Za dobu Δt tedy dojde k přechodům prakticky pouze v oblasti tohoto maxima, tj.

$$\omega_{fi} \lesssim \frac{2\pi}{\Delta t}$$

a označíme-li $\Delta E^{(0)} \equiv \left|E_f^{(0)} - E_i^{(0)}\right|$, dostaneme

$$\boxed{\Delta E^{(0)}\Delta t \lesssim 2\pi\hbar}$$

Tento vztah se nazývá *relace neurčitosti mezi časem a energií.*

Pokud lze na okolí $E_i^{(0)}$ pohlížet jako na kontinuum hladin (jedná se o přechod do spojité části spektra, nebo je v tomto okolí velké množství diskrétních hladin), pak se (3.0.5) píše ve tvaru *Fermiho zlatého pravidla*

$$\boxed{w_{i\to F}(t_0 \to t) \equiv \frac{\mathcal{P}_{i\to F}(t_0 \to t)}{\Delta t} = \frac{2\pi}{\hbar}\left|H_{\mathrm{I}fi}\right|^2 \rho_f(E)\Big|_{E\simeq E_i^{(0)}}} \tag{3.0.6}$$

což je rychlost přechodu z počátečního stavu i do celého jeho okolí $f \in F$, na kterém je $\left|H_{\mathrm{I}fi}\right|^2$ přibližně konstantní.

Pro **harmonickou poruchu** o frekvenci ω

$$\hat{\mathsf{H}}_{\mathrm{I}} = \underbrace{\hat{\mathsf{h}}^{(+)}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}}_{\text{emise}} + \underbrace{\hat{\mathsf{h}}^{(-)}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}}_{\text{absorpce}} \tag{3.0.7}$$

dostaneme užitím podobného postupu jako v případě konstantní poruchy vztah

$$\boxed{\omega_{fi} \simeq \pm\omega, \qquad \text{tj. } E_f^{(0)} \simeq E_i^{(0)} \pm \hbar\omega} \tag{3.0.8}$$

platící za předpokladu, že porucha je zapnuta po dostatečně dlouhý čas.

Fermiho zlaté pravidlo v tomto případě zní

$$\boxed{\begin{aligned} w_{i\to F}(t_0 \to t) &= \frac{2\pi}{\hbar}\left|h_{fi}^{(+)}\right|^2 \rho_f(E)\Big|_{E\simeq E_i^{(0)}-\hbar\omega} \text{ (stimulovaná emise)}\,, \\ &= \frac{2\pi}{\hbar}\left|h_{fi}^{(-)}\right|^2 \rho_f(E)\Big|_{E\simeq E_i^{(0)}+\hbar\omega} \text{ (stimulovaná absorpce)}\,. \end{aligned}} \tag{3.0.9}$$

Pokud máme periodickou poruchu, která není harmonická, můžeme ji pomocí Fourierovy tranformace na periodickou rozložit a počítat pravděpodobnost přechodu pro každou složku zvlášť.

Díky rovnosti $\langle i|h^{(+)}|f\rangle = \langle f|h^{(-)}|i\rangle$, platí *princip detailní rovnováhy*, který se dá slovně vyjádřit jako

$$\frac{\text{rychlost emise } i \to [f]}{\text{hustota kvantových stavů } [f]} = \frac{\text{rychlost absorpce } f \to [i]}{\text{hustota kvantových stavů } [i]}\,.$$

Poznámka:

Diferenciální rovnici (3.0.1) můžeme také zkoušet v bázi $|\phi_m\rangle$ řešit přímo. Označíme-li

$$S_{fi}(t, t_0) \equiv \left\langle \phi_f \middle| \hat{\mathsf{S}}(t, t_0) \middle| \phi_i \right\rangle ,$$

pak dostaneme

$$\mathrm{i}\hbar \frac{\partial S_{fi}(t, t_0)}{\partial t} = \sum_m \hat{\mathsf{H}}_{\mathrm{I}fm}(t)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{fm} t}\, S_{mi}(t, t_0) \qquad\qquad S_{fi}(t_0, t_0) = \delta_{fi}$$

což je soustava vázaných obyčejných diferenciálních rovnic 1. řádu. Soustavu lze explicitně vyřešit například pro dvouhladinový systém, viz příklad 3.2.

3.1 Nabitý harmonický oscilátor

Jednorozměrný harmonický oscilátor s nábojem q, popsaný Hamiltoniánem

$$\hat{\mathsf{H}}_0 = \frac{1}{2M}\hat{\mathsf{p}}^2 + \frac{1}{2}M\Omega^2\hat{\mathsf{x}}^2 ,$$

vložíme do homogenního časově proměnného elektrického pole s intenzitou

$$E(t) = \frac{A}{\tau\sqrt{\pi}}\, \mathrm{e}^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)^2}$$

(A, τ jsou reálné parametry).

1. Jak vypadá Hamiltonián interakce oscilátoru s elektrickým polem?
2. Určete hybnost, která se klasicky přenese mezi časy $t_i \to -\infty$ a $t_f \to \infty$.
3. Spočítejte pravděpodobnost přechodu ze základního stavu v čase $t_i \to -\infty$ do prvního excitovaného stavu v čase $t_f \to \infty$ v rámci 1. řádu nestacionární poruchové teorie.

Řešení:

1. Zadaná intenzita elektrického pole odpovídá potenciálu

   $$V(x, t) = -qE(t)x ,$$

   takže operátor časově závislé opravy k Hamiltoniánu $\hat{\mathsf{H}}_0$ je

   $$\hat{\mathsf{H}}_{\mathrm{I}}(t) = -qE(t)\hat{\mathsf{x}} .$$

2. Přenesená hybnost je dána časovým integrálem elektrické síly

   $$P = \int_{t_i}^{t_f} F(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} \left[-\frac{\partial V(x, t)}{\partial x}\right] \mathrm{d}t = \frac{qA}{\tau\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)^2}\, \mathrm{d}t = qA .$$

3. Příslušné elementy S-matice jsou podle (3.0.4)

$$
\begin{aligned}
S_{10}^{(0)} &= 0 \\
S_{10}^{(1)} &= -\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} \langle 1|[-qE(t)\hat{\mathsf{x}}]|0\rangle\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{10}t_1}\,\mathrm{d}t_1 = \left| \begin{aligned} \hat{\mathsf{x}} &= \sqrt{\tfrac{\hbar}{2M\Omega}}\,(\hat{\mathsf{a}}^\dagger + \hat{\mathsf{a}}) \\ \omega_{10} &= \tfrac{E_1^{(0)}-E_0^{(0)}}{\hbar} = \Omega \end{aligned} \right| \\
&= \frac{\mathrm{i}qA}{\sqrt{2\pi\hbar M\Omega}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)^2 + \mathrm{i}\Omega t}\,\frac{\mathrm{d}t}{\tau}}_{\sqrt{\pi}\,\mathrm{e}^{-\left(\frac{\Omega\tau}{2}\right)^2}} = \frac{\mathrm{i}qA}{\sqrt{2\hbar M\Omega}}\,\mathrm{e}^{-\left(\frac{\Omega\tau}{2}\right)^2}\,.
\end{aligned}
$$

Pravděpodobnost přechodu je tedy do prvního řádu poruchové teorie rovna

$$
\mathcal{P}_{0\to1} = \left|S_{10}^{(0)} + S_{11}^{(1)}\right|^2 = \frac{q^2A^2}{2\hbar M\Omega}\,\mathrm{e}^{-\frac{\Omega^2\tau^2}{2}} = \frac{P^2}{2\hbar M\Omega}\,\mathrm{e}^{-\frac{\Omega^2\tau^2}{2}}\,.
$$

Poznámka:

Uvedená porucha v prvním řádu poruchové teorie způsobí přechod nanejvýš na sousední energetickou hladinu harmonického oscilátoru.

3.2 Dvouhladinový systém s periodickou poruchou

Dvouhladinový systém je popsaný Hamiltoniánem

$$
\begin{aligned}
\hat{\mathsf{H}}(t) &= \hat{\mathsf{H}}_0 + \hat{\mathsf{H}}_\mathrm{I}(t)\,, \\
\hat{\mathsf{H}}_0 &= \begin{pmatrix} E_1^{(0)} & 0 \\ 0 & E_2^{(0)} \end{pmatrix} = E_1^{(0)}\,|\phi_1\rangle\langle\phi_1| + E_2^{(0)}\,|\phi_2\rangle\langle\phi_2|\,, \\
\hat{\mathsf{H}}_\mathrm{I}(t) &= \Theta(t)\begin{pmatrix} 0 & \gamma\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \\ \gamma\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} & 0 \end{pmatrix} = \Theta(t)\left[\gamma\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,|\phi_1\rangle\langle\phi_2| + \gamma\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,|\phi_2\rangle\langle\phi_1|\right]\,,
\end{aligned}
$$

přičemž operátor $\hat{\mathsf{H}}_\mathrm{I}(t)$ představuje periodickou poruchu, která je zapnuta v čase $t_0 = 0$ (formálně zapsáno pomocí funkce Θ), γ je reálný parametr, který určuje sílu poruchy, a $E_{1,2}^{(0)}$ jsou neporušené energie.

V čase $t < 0$ je systém ve stavu $|\phi_i\rangle \equiv |\phi_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

1. Spočítejte neporuchově (tj. řešením soustavy diferenciálních rovnic pro příslušné maticové elementy operátoru S-matice) pravděpodobnost $\mathcal{P}_{1\to2}(t)$, se kterou se bude systém nacházet ve stavu $|\phi_2\rangle$ v čase $t > 0$. Vzorec, který dostanete, se nazývá *Rabiho formule.*

2. Řešte totéž do druhého řádu nestacionární poruchové teorie a získanou pravděpodobnost srovnejte s přesným řešením. Za jaké podmínky toto přibližné řešení dobře aproximuje přesný výsledek?

3. Za jaké podmínky můžeme v čase $t > 0$ naměřit, že se systém nachází ve stavu $|\phi_2\rangle$ s pravděpodobností jedna?