5 Wigner-Eckartův teorém, tenzorové operátory

Ireducibilní tenzorový operátor

Složky $\hat{\mathsf{T}}^{(\lambda)}_{\mu}$ libovolného *ireducibilního*[6] *tenzorového operátoru*[7] $\hat{\mathbb{T}}^{(\lambda)}$, $\lambda = 0, 1, \ldots$[8], $\mu = -\lambda, \ldots, \lambda$ splňují komutační relace

$$\begin{aligned} \left[\hat{\mathsf{J}}_3, \hat{\mathsf{T}}^{(\lambda)}_{\mu}\right] &= \mu \hat{\mathsf{T}}^{(\lambda)}_{\mu} \\ \left[\hat{\mathsf{J}}_{\pm}, \hat{\mathsf{T}}^{(\lambda)}_{\mu}\right] &= \alpha^{(\pm)}(\lambda, \mu) \hat{\mathsf{T}}^{(\lambda)}_{\mu\pm1}, \end{aligned} \tag{5.0.1}$$

kde $\hat{\mathbf{J}}$ je operátor impulsmomentu, $\hat{\mathsf{J}}_{\pm} = \hat{\mathsf{J}}_1 \pm \mathrm{i}\hat{\mathsf{J}}_2$ a

$$\alpha^{(\pm)}(\lambda, \mu) \equiv \sqrt{\lambda(\lambda+1) - \mu(\mu\pm1)}.$$

Wigner-Eckartův teorém

$$\boxed{\begin{aligned} &\left\langle a, J\, M \middle| \hat{\mathsf{T}}^{(\lambda)}_{\mu} \middle| b, j\, m \right\rangle = \\ &\quad = \frac{(-1)^{J+\lambda-j}}{\sqrt{2J+1}} \mathcal{C}^{J\,M}_{\lambda\,\mu\,j\,m} \left(a, J \| \hat{\mathbb{T}}^{(\lambda)} \| b, j\right) \\ &\quad = (-1)^{J-M} \begin{pmatrix} J & \lambda & j \\ -M & \mu & m \end{pmatrix} \left(a, J \| \hat{\mathbb{T}}^{(\lambda)} \| b, j\right) \end{aligned}}\,, \tag{5.0.2}$$

přičemž:

- Zlomek $\frac{(-1)^{J+\lambda-j}}{\sqrt{2J+1}}$ je jen záležitost konvence. Zde je použita stejná konvence jako v knize J. Formánka [9].
- $\left(a, J \| \hat{\mathbb{T}}^{(\lambda)} \| b, j\right)$ je *redukovaný maticový element.*
- a, b jsou další vlastní čísla (může jich být i více) operátoru (operátorů) $\hat{\mathsf{A}}$, které spolu s impulsmomentem $\hat{\mathbf{J}}$ tvoří úplnou množinu pozorovatelných:

$$\left[\hat{\mathsf{A}}, \hat{\mathbf{J}}\right] = 0.$$

---

[6] Ireducibilního proto, že se transformuje podle příslušné ireducibilní reprezentace grupy SO(3) pomocí Wignerových D-funkcí

$$\begin{aligned} \hat{\mathsf{T}}^{(\lambda)\prime}_{\mu} &= \sum_{\mu'} D^{\lambda}_{\mu'\mu}(\phi, \theta, \psi) \hat{\mathsf{T}}^{(\lambda)}_{\mu'}\,, \\ D^{\lambda}_{\mu'\mu}(\phi, \theta, \psi) &\equiv \left\langle \lambda\mu' \middle| \hat{\mathcal{R}}_3(\psi) \hat{\mathcal{R}}_2(\theta) \hat{\mathcal{R}}_3(\phi) \middle| \lambda\mu \right\rangle = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\mu'\psi + \mu\phi)}\, d^{\lambda}_{\mu'\mu}(\theta)\,, \end{aligned}$$

narozdíl např. od tenzoru vzniklého vzniklého dyadickým součinem dvou vektorů, který se transformuje běžnými rotačními maticemi

$$\hat{\mathsf{T}}_{j'k'l'\ldots} = \sum_{jkl\ldots} \hat{\mathsf{R}}_{j'j}(\psi, \theta, \phi) \hat{\mathsf{R}}_{k'k}(\psi, \theta, \phi) \hat{\mathsf{R}}_{l'l}(\psi, \theta, \phi) \hat{\mathsf{T}}_{jkl\ldots}\,.$$

[7] Nazývá se také sférický tenzor.

[8] Lze zavést ireducibilní tenzorový operátor také položíselného řádu $\lambda = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \ldots$. Jelikož jeho střední hodnota je dvojznačná, nemůže odpovídat žádné pozorovatelné.

- $\hat{\mathsf{T}}^{(\lambda)}_{\mu}$ jsou komponenty ireducibilního tenzorového operátoru $\hat{\mathbb{T}}^{(\lambda)}$ λ-tého řádu.
- Mezi $3j$ symbolem a Clebsch-Gordanovými koeficienty platí relace

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} &= \\ &= (-1)^{j_2-j_3-m_1} \frac{\mathcal{C}^{j_1\,-m_1}_{j_2\,m_2\,j_3\,m_3}}{\sqrt{2j_1+1}} \\ &= (-1)^{j_3-j_1-m_2} \frac{\mathcal{C}^{j_2\,-m_2}_{j_3\,m_3\,j_1\,m_1}}{\sqrt{2j_2+1}} \\ &= (-1)^{j_1-j_2-m_3} \frac{\mathcal{C}^{j_3\,-m_3}_{j_1\,m_1\,j_2\,m_2}}{\sqrt{2j_3+1}}, \end{aligned} \tag{5.0.3}$$

přičemž uvedené tři rovnosti plynou ze symetrie $3j$ symbolů:

$$\begin{pmatrix} j_{\sigma_1} & j_{\sigma_2} & j_{\sigma_3} \\ m_{\sigma_1} & m_{\sigma_2} & m_{\sigma_3} \end{pmatrix} = \begin{cases} (-1)^{j_1+j_2+j_3} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} & \operatorname{sign}\sigma = -1 \\ \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} & \operatorname{sign}\sigma = 1 \end{cases} \tag{5.0.4}$$

Další symetrie $3j$ symbolů:

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ -m_1 & -m_2 & -m_3 \end{pmatrix} = (-1)^{j_1+j_2+j_3} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \tag{5.0.5}$$

Wigner-Eckartův teorém je užitečný zejména proto, že k výpočtu všech $n = (2J+1)(2\lambda+1)(2j+1)$ maticových elementů stačí znát jediný z nich, zbytek se dopočte pomocí běžně tabulovaných Clebsch-Gordanových koeficientů. Z oněch n elementů jsou navíc všechny, které nesplňují výběrová pravidla pro hodnoty J, M, λ, μ, j, m,

$$\boxed{\begin{aligned} &m + \mu = M \\ &|j-\lambda| \leq J \leq j+\lambda \qquad \text{(trojúhelníková nerovnost)} \end{aligned}}, \tag{5.0.6}$$

nulové.

Tenzorový součin

Tenzorový součin dvou ireducibilních tenzorových operátorů

$$\hat{\mathbb{W}}^{(\lambda)} = [\hat{\mathbb{U}}^{(\lambda_1)} \otimes \hat{\mathbb{V}}^{(\lambda_2)}]^{(\lambda)}$$

je definován vztahem pro komponenty

$$\boxed{\hat{\mathsf{W}}^{(\lambda)}_{\mu} = \sum_{\mu_1,\mu_2} \mathcal{C}^{\lambda\,\mu}_{\lambda_1\,\mu_1\,\lambda_2\,\mu_2} \hat{\mathsf{U}}^{(\lambda_1)}_{\mu_1} \hat{\mathsf{V}}^{(\lambda_2)}_{\mu_2}}.$$

Pro tenzor nultého řádu pak vyplývá

$$\begin{aligned} \hat{\mathsf{W}}^{(0)}_{0} &= \sum_{\mu_1,\mu_2} \mathcal{C}^{0\,0}_{\lambda_1\,\mu_1\,\lambda_2\,\mu_2} \hat{\mathsf{U}}^{(\lambda_1)}_{\mu_1} \hat{\mathsf{V}}^{(\lambda_2)}_{\mu_2} \\ &= \frac{(-1)^{\lambda_1}}{\sqrt{2\lambda_1+1}} \sum_{\mu_1} (-1)^{\mu_1} \hat{\mathsf{U}}^{(\lambda_1)}_{\mu_1} \hat{\mathsf{V}}^{(\lambda_1)}_{-\mu_1} \end{aligned}$$

a na základě této rovnosti se definuje *skalární součin* ireducibilních tenzorových operátorů

$$\boxed{\hat{\mathbb{U}}^{(\lambda)} \cdot \hat{\mathbb{V}}^{(\lambda)} \equiv (-1)^{-\lambda} \sqrt{2\lambda+1}\, \hat{W}_0^{(0)} = \sum_{\mu} (-1)^{\mu}\, \hat{U}_{\mu}^{(\lambda)} \hat{V}_{-\mu}^{(\lambda)}} . \qquad (5.0.7)$$

5.1 Vektorový operátor jako ireducibilní tenzor

Ukažte, že libovolnému vektorovém operátoru $\hat{\mathbf{V}}$ s kartézskými složkami $(\hat{V}_1, \hat{V}_2, \hat{V}_3)$ se dá přiřadit ireducibilní tenzorový operátor 1. řádu pomocí předpisu

$$\boxed{\begin{aligned} \hat{V}_{-1}^{(1)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\hat{V}_1 - \mathrm{i} \hat{V}_2 \right) \\ \hat{V}_0^{(1)} &= \hat{V}_3 \\ \hat{V}_1^{(1)} &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\hat{V}_1 + \mathrm{i} \hat{V}_2 \right) \end{aligned}} \qquad (5.1.1)$$

($\hat{V}_{\mu}^{(1)}$ jsou sférické složky vektoru).

Řešení:

Libovolný vektorový operátor $\hat{\mathbf{V}}$ splňuje komutační relace s operátorem momentu hybnosti[9]

$$\left[\hat{V}_j, \hat{J}_k \right] = \mathrm{i} \epsilon_{jkl} V_l \, .$$

Důkaz se provede přímým dosazením do vztahů (5.0.1):

$$\begin{aligned} \left[\hat{J}_3, \hat{V}_{-1}^{(1)} \right] &= -\left[\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\hat{V}_x - \mathrm{i} \hat{V}_y \right), \hat{J}_3 \right] = -\frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\mathrm{i} \hat{V}_y + \hat{V}_x \right) = -\hat{V}_{-1}^{(1)} , \\ \left[\hat{J}_3, \hat{V}_0^{(1)} \right] &= -\left[\hat{V}_3, \hat{J}_3 \right] = 0 \, , \\ \left[\hat{J}_3, \hat{V}_1^{(1)} \right] &= \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\hat{V}_x + \mathrm{i} \hat{V}_y \right), \hat{J}_3 \right] = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\mathrm{i} \hat{V}_y - \hat{V}_x \right) = +\hat{V}_1^{(1)} , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left[\hat{J}_{\pm}, \hat{V}_{-1}^{(1)} \right] &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \left[\hat{V}_1 - \mathrm{i} \hat{V}_2, \hat{J}_1 \pm \mathrm{i} \hat{J}_2 \right] = -\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\mp \hat{V}_3 - \hat{V}_3 \right) = \begin{cases} \alpha^{+}(1,-1) \hat{V}_0^{(1)} \\ 0 \end{cases} , \\ \left[\hat{J}_{\pm}, \hat{V}_0^{(1)} \right] &= -\left[\hat{V}_3, \hat{J}_1 \pm \mathrm{i} \hat{J}_2 \right] = \pm \hat{J}_1 - \mathrm{i} \hat{J}_2 = \alpha^{\pm}(1,0) \hat{V}_{\pm 1}^{(1)} , \\ \left[\hat{J}_{\pm}, \hat{V}_1^{(1)} \right] &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\hat{V}_1 + \mathrm{i} \hat{V}_2, \hat{J}_1 \pm \mathrm{i} \hat{J}_2 \right] = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\mp \hat{V}_3 + \hat{V}_3 \right) = \begin{cases} 0 \\ \alpha^{-}(1,1) \hat{V}_0^{(1)} \end{cases} . \end{aligned}$$

5.2 Skalární součin vektorových operátorů

Ukažte, že definice skalárního součinu dvou tenzorových operátorů 1. řádu je identická se skalárním součinem vektorového operátoru vyjádřeného v kartézských komponentách:

$$\hat{\mathbb{U}}^{(1)} \cdot \hat{\mathbb{V}}^{(1)} = \hat{\mathbf{U}} \cdot \hat{\mathbf{V}} = \sum_{j=1}^{3} \hat{U}_j \hat{V}_j \, .$$

[9] Jsou to například operátory $\hat{\mathbf{X}}$, $\hat{\mathbf{P}}$, $\hat{\mathbf{L}}$, … .

Řešení:

Důkaz se provede přímým dosazením (5.1.1) do definice skalárního součinu tenzorových operátorů:

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbb{U}}^{(1)} \cdot \hat{\mathbb{V}}^{(1)} &= \sum_{\mu} (-1)^{\mu} \hat{\mathsf{U}}^{(1)}_{\mu} \hat{\mathsf{V}}^{(1)}_{-\mu} = -\hat{\mathsf{U}}^{(1)}_{-1} \hat{\mathsf{V}}^{(1)}_{1} + \hat{\mathsf{U}}^{(1)}_{0} \hat{\mathsf{V}}^{(1)}_{0} - \hat{\mathsf{U}}^{(1)}_{1} \hat{\mathsf{V}}^{(1)}_{-1} \\
&= \frac{1}{2} \underbrace{\left(\hat{\mathsf{U}}_1 - \mathrm{i}\hat{\mathsf{U}}_2\right)\left(\hat{\mathsf{V}}_1 + \mathrm{i}\hat{\mathsf{V}}_2\right)}_{\hat{\mathsf{U}}_1\hat{\mathsf{U}}_2 + \mathrm{i}\left(\hat{\mathsf{U}}_1\hat{\mathsf{V}}_2 - \hat{\mathsf{U}}_2\hat{\mathsf{V}}_1\right) + \hat{\mathsf{U}}_2\hat{\mathsf{V}}_2} + \hat{\mathsf{U}}_3\hat{\mathsf{V}}_3 + \frac{1}{2} \underbrace{\left(\hat{\mathsf{U}}_1 + \mathrm{i}\hat{\mathsf{U}}_2\right)\left(\hat{\mathsf{V}}_1 - \mathrm{i}\hat{\mathsf{V}}_2\right)}_{\hat{\mathsf{U}}_1\hat{\mathsf{U}}_2 + \mathrm{i}\left(-\hat{\mathsf{U}}_1\hat{\mathsf{V}}_2 + \hat{\mathsf{U}}_2\hat{\mathsf{V}}_1\right) + \hat{\mathsf{U}}_2\hat{\mathsf{V}}_2} \\
&= \hat{\mathsf{U}}_1\hat{\mathsf{V}}_1 + \hat{\mathsf{U}}_2\hat{\mathsf{V}}_2 + \hat{\mathsf{U}}_3\hat{\mathsf{V}}_3 = \hat{\mathbf{U}} \cdot \hat{\mathbf{V}} \,.
\end{aligned}$$

5.3 Využití symetrií $3j$ symbolů

Pomocí symetrií $3j$ symbolů a znalosti Clebsch-Gordanova koeficientu

$$\mathcal{C}^{J\,M}_{j\,m\,0\,0} = \delta_{jJ}\delta_{mM}$$

(plyne z volby $|j_1\, j_1\rangle\, |0\, 0\rangle = |j_1\, j_1\, 0\, j_1\rangle$, což je vlastně Condon-Shortleyova fázová konvence) spočítejte Clebsch-Gordanovy koeficienty

$$\mathcal{C}^{J\,M}_{0\,0\,j\,m} \quad \text{a} \quad \mathcal{C}^{0\,0}_{j_1\,m_1\,j_2\,m_2} \,.$$

Řešení:

Pomocí vztahu mezi Clebsch-Gordanovými koeficienty a $3j$ symboly (5.0.3) vyjádříme

$$\begin{pmatrix} j & 0 & J \\ m & 0 & -M \end{pmatrix} = \frac{(-1)^{j+M}}{\sqrt{2J+1}} \mathcal{C}^{J\,M}_{j\,m\,0\,0} \,,$$

přičemž na základě výběrových pravidel pro skládání momentů hybnosti (**??**) víme, že jediné nenulové koeficienty jsou ty s $j = J$ a $m = -M$. Využitím permutačních symetrií $3j$ symbolů (5.0.4) dostaneme

$$\begin{pmatrix} j & 0 & J \\ m & 0 & -M \end{pmatrix} = (-1)^{j+J} \begin{pmatrix} 0 & j & J \\ 0 & m & -M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J & j & 0 \\ -M & m & 0 \end{pmatrix} \,,$$

což zpětně převedeno na Clebsch-Gordanovy koeficienty definičním vztahem (5.0.3) dá

$$\begin{aligned}
(-1)^{j+J} \begin{pmatrix} 0 & j & J \\ 0 & m & -M \end{pmatrix} &= \frac{(-1)^{J+M}}{\sqrt{2J+1}} \mathcal{C}^{J\,M}_{0\,0\,j\,m} \,, \\
\begin{pmatrix} J & j & 0 \\ -M & m & 0 \end{pmatrix} &= (-1)^{J-j} \mathcal{C}^{0\,0}_{J\,-M\,j\,m} \,,
\end{aligned}$$

takže

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}^{J\,M}_{0\,0\,j\,m} &= \mathcal{C}^{J\,M}_{j\,m\,0\,0} = \delta_{jJ}\delta_{mM} \,, \\
\mathcal{C}^{0\,0}_{J\,-M\,j\,m} &= (-1)^{J-j} \frac{(-1)^{j+M}}{\sqrt{2J+1}} \mathcal{C}^{J\,M}_{0\,0\,j\,m} = \frac{(-1)^{J+M}}{\sqrt{2J+1}} \delta_{jJ}\delta_{mM} \,.
\end{aligned}$$

Druhý vztah přeznačením $J \mapsto j_1$, $-M \mapsto m_1$, $j \mapsto j_2$, $m \mapsto m_2$ vede na hledaný koeficient

$$\boxed{\mathcal{C}^{0\,0}_{j_1\,m_1\,j_2\,m_2} = \frac{(-1)^{j_1-m_1}}{\sqrt{2j_1+1}} \delta_{j_1 j_2}\delta_{m_1\,-m_2}} \,. \tag{5.3.1}$$

5.4 Redukovaný maticový element skalárního operátoru

Určete redukovaný maticový element operátoru $\hat{\mathbb{S}}^{(0)}$.

Řešení:

Pomocí Wigner-Eckartova teorému (5.0.2) nalezneme

$$\left\langle a, J\, M \middle| \hat{\mathsf{S}}_0^{(0)} \middle| b, j\, m \right\rangle = \frac{(-1)^{J-j}}{\sqrt{2J+1}} \underbrace{\mathcal{C}^{J\,M}_{0\,0\,j\,m}}_{\delta_{jJ}\delta_{mM} \text{ podle výsledku předchozí úlohy}} \left(a, J \| \hat{\mathbb{S}}^{(0)} \| b, j \right) .$$

Skalární operátor komutuje s $\hat{\mathbf{J}}$, takže na levé straně rovnosti dostaneme

$$\left\langle a, J\, M \middle| \hat{\mathsf{S}}_0^{(0)} \middle| b, j\, m \right\rangle = f(a,b)\delta_{jJ}\delta_{mM} , \tag{5.4.1}$$

kde $f(a,b) \equiv \left\langle a \middle| \hat{\mathsf{S}}_0^{(0)} \middle| b \right\rangle$ je funkce „nerotačních“ kvantových čísel a, b. Srovnáním obou rovností dostaneme

$$\boxed{\left(a, J \| \hat{\mathbb{S}}^{(0)} \| b, j \right) = f(a,b)\delta_{Jj}\sqrt{2J+1} \,.}$$

5.5 Redukovaný maticový element skalárního součinu

Nalezněte vztah mezi redukovaným maticovým elementem skalárního součinu $\left(a, J \| \hat{\mathbb{U}}^{(\lambda)} \cdot \hat{\mathbb{V}}^{(\lambda)} \| b, j \right)$ a redukovanými maticovými elementy jednotlivých činitelů $\left(a, J \| \hat{\mathbb{U}}^{(\lambda)} \| b, j \right)$ a $\left(a, J \| \hat{\mathbb{V}}^{(\lambda)} \| b, j \right)$.

Řešení:

Wigner-Eckartův (5.0.2) na jednu stranu dává

$$\begin{aligned} \left\langle a, J\, M \middle| \hat{\mathbb{U}}^{(\lambda)} \cdot \hat{\mathbb{V}}^{(\lambda)} \middle| b, j\, m \right\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2J+1}} \mathcal{C}^{J\,M}_{0\,0\,j\,m} \left(a, J \| \hat{\mathbb{U}}^{(\lambda)} \cdot \hat{\mathbb{V}}^{(\lambda)} \| b, j \right) \\ &= \frac{\delta_{Jj}\delta_{Mm}}{\sqrt{2J+1}} \left(a, J \| \hat{\mathbb{U}}^{(\lambda)} \cdot \hat{\mathbb{V}}^{(\lambda)} \| b, j \right) , \end{aligned} \tag{5.5.1}$$

($\hat{\mathbb{U}}^{(\lambda)} \cdot \hat{\mathbb{V}}^{(\lambda)}$ je skalární operátor).

V dalším stačí počítat jen maticový element diagonální v J, M, ostatní jsou nulové. Rozepsáním skalárního součinu dostaneme

$$\begin{aligned} &\left\langle a, J\, M \middle| \hat{\mathbb{U}}^{(\lambda)} \cdot \hat{\mathbb{V}}^{(\lambda)} \middle| b, J\, M \right\rangle \\ &\quad = \left\langle a, J\, M \middle| \sum_{\mu} (-1)^{\mu}\, \hat{\mathsf{U}}_{\mu}^{(\lambda)} \hat{\mathsf{V}}_{-\mu}^{(\lambda)} \middle| b, J\, M \right\rangle \\ &\quad = \sum_{\mu c j' m'} (-1)^{\mu} \underbrace{\left\langle a, J\, M \middle| \hat{\mathsf{U}}_{\mu}^{(\lambda)} \middle| c, j'\, m' \right\rangle}_{(-1)^{J-M} \begin{pmatrix} J & \lambda & j' \\ -M & \mu & m' \end{pmatrix} \left(a,J \| \hat{\mathbb{U}}^{(\lambda)} \| c,j' \right)} \underbrace{\left\langle c, j'\, m' \middle| \hat{\mathsf{V}}_{-\mu}^{(\lambda)} \middle| b, J\, M \right\rangle}_{(-1)^{j'-m'} \begin{pmatrix} j' & \lambda & J \\ -m' & -\mu & M \end{pmatrix} \left(c,j' \| \hat{\mathbb{V}}^{(\lambda)} \| b,J \right)} . \end{aligned}$$

V druhém $3j$ symbolu prohodíme první a třetí sloupec pomocí permutačních vztahů (5.0.4) a zároveň vyměníme znaménka v druhé řádce u projekcí pomocí vztahu (5.0.5):

$$\begin{pmatrix} j' & \lambda & J \\ -m' & -\mu & M \end{pmatrix} = \underbrace{(-1)^{2(j'+\lambda+J)}}_{1} \begin{pmatrix} J & \lambda & j' \\ -M & \mu & m' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J & \lambda & j' \\ -M & \mu & m' \end{pmatrix} .$$

Co se týče znaménka $-$, v upravovaném výrazu máme

$$(-1)^{\mu+J-M+j'-m'} = (-1)^{J+j'+\mu-M-m'} . \tag{5.5.2}$$

Na základě výběrových pravidel (5.0.6) je $m' + \mu = M$, takže zbývá

$$(-1)^{J+j'} (-1)^{-2m'} . \tag{5.5.3}$$

Faktor $-2m'$ je vždy sudý, pokud m' je celé číslo, a vždy lichý, pokud m' je polocelé číslo, takže lze nahradit $(-1)^{-2m'} \mapsto (-1)^{-2j'}$ a toto znaménko neovlivní sumu přes m'.

Dále využijeme relací ortogonality pro $3j$ symboly, které v obecném případě znějí

$$\boxed{\sum_{m_2 m_3} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1' & j_2 & j_3 \\ m_1' & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2j_1+1} \delta_{j_1 j_1'} \delta_{m_1 m_1'} \delta(j_1, j_2, j_3) ,}$$

kde $\delta(j_1, j_2, j_3) = 1$, pokud j_1, j_2, j_3 splňují trojúhelníkovou nerovnost $|j_1 - j_2| \leq j_3 \leq j_1 + j_2$, a 0 v opačném případě.

Pro $3j$ symboly v úloze dostaneme

$$\sum_{\mu m'} \begin{pmatrix} J & \lambda & j' \\ -M & \mu & m' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J & \lambda & j' \\ -M & \mu & m' \end{pmatrix} = \frac{1}{2J+1} \delta(J, \lambda, j') , \tag{5.5.4}$$

takže

$$\begin{aligned} &\left\langle a, J\, M \middle| \hat{\mathbb{U}}^{(\lambda)} \cdot \hat{\mathbb{V}}^{(\lambda)} \middle| b, J\, M \right\rangle \\ &\quad = \frac{(-1)^J}{2J+1} \sum_{cj'} (-1)^{-j'} \left(a, J \| \hat{\mathbb{U}}^{(\lambda)} \| c, j' \right) \left(c, j' \| \hat{\mathbb{V}}^{(\lambda)} \| b, J \right) \end{aligned}$$

a srovnáním s výrazem (5.5.1) dostaneme

$$\boxed{\begin{aligned} &\left(a, J \| \hat{\mathbb{U}}^{(\lambda)} \cdot \hat{\mathbb{V}}^{(\lambda)} \| b, j \right) = \\ &\quad = \delta_{Jj} (-1)^J \frac{1}{\sqrt{2J+1}} \sum_{cj'} (-1)^{-j'} \left(a, J \| \hat{\mathbb{U}}^{(\lambda)} \| c, j' \right) \left(c, j' \| \hat{\mathbb{V}}^{(\lambda)} \| b, j \right) \end{aligned}} . \tag{5.5.5}$$

Poznámka:

V získaném výrazu probíhá sčítání přes j' jen přes konečný počet hodnot splňujících společně s J a λ trojúhelníkovou nerovnost $|J - \lambda| \leq j' \leq J + \lambda$. Suma přes c' je však obecně nekonečná, pokud nezvolíme v konkrétním případě operátor $\hat{\mathsf{C}}$ speciálně.

5.6 Redukovaný maticový element impulsmomentu

Nalezněte redukovaný maticový element operátoru impulsmomentu $\hat{\mathbf{J}}$.

Řešení:

Redukovaný maticový element stačí počítat pro jednu sférickou komponentu tenzoru $\hat{\mathbb{J}}^{(1)}$. Je výhodné zvolit si $\hat{\mathsf{J}}_0^{(1)} = \hat{\mathsf{J}}_z$. Pak

$$\left\langle a, J\,M \middle| \hat{\mathsf{J}}_3 \middle| b, j\,m \right\rangle = m\,f(a,b)\delta_{Jj}\delta_{Mm}.$$

Na druhou stranu (uvažujeme již $J = j$)

$$\begin{aligned}
&\left\langle a, J\,M \middle| \hat{\mathsf{J}}_3 \middle| b, J\,m \right\rangle = \\
&\quad = \delta_{Mm} \frac{(-1)^{J+1-J}}{\sqrt{2J+1}} \mathcal{C}^{J\,M}_{1\,0\,J\,M} \left(a, J \| \hat{\mathbb{J}}^{(1)} \| b, J \right) = \\
&\quad = \delta_{Mm} \frac{1}{\sqrt{J(J+1)(2J+1)}} \left(a, J \| \hat{\mathbb{J}}^{(1)} \| b, J \right),
\end{aligned}$$

neboť

$$\mathcal{C}^{J\,M}_{1\,0\,J\,M} = -m/\sqrt{J(J+1)}\,, \tag{5.6.1}$$

viz například [9].

Srovnáním dostáváme

$$\boxed{\left(a, J \| \hat{\mathbb{J}}^{(1)} \| b, j \right) = f(a,b)\delta_{Jj}\sqrt{J(J+1)(2J+1)}}\,,$$

kde $f(a,b) = \langle a|b \rangle$.

Poznámka:

Vektor $\hat{\mathbf{J}}$ lze realizovat pomocí Pauliho σ matic:

$$\hat{\mathbf{s}} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\,.$$

Pak například

$$\left(\frac{1}{2} \| \boldsymbol{\sigma} \| \frac{1}{2} \right) = 2 \left(\frac{1}{2} \| \hat{\mathbb{s}}^{(1)} \| \frac{1}{2} \right) = 2 \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1 \right) \left(2 \times \frac{1}{2} + 1 \right)} = \sqrt{6}\,.$$

5.7 Projekce vektoru na impulsmoment

Nalezněte redukovaný maticový element skalárního součinu libovolného vektorového operátoru $\hat{\mathbf{V}}$ s impulsmomentem $\hat{\mathbf{J}}$.

Řešení:

Využijeme vztahu pro skalární součin tenzorových operátorů (5.5.5). Podle něj

$$
\begin{aligned}
\left(a, J \| \hat{\mathbf{J}} \cdot \hat{\mathbf{V}} \| b, j\right) &= \left(a, J \| \hat{\mathbb{J}}^{(1)} \cdot \hat{\mathbb{V}}^{(1)} \| b, j\right) = \\
&= \frac{(-1)^J \, \delta_{Jj}}{\sqrt{2J+1}} \sum_{cj'} (-1)^{-j'} \left(a, J \| \hat{\mathbb{J}}^{(1)} \| c, j'\right) \left(c, j' \| \hat{\mathbb{V}}^{(1)} \| b, J\right) = \\
&= \frac{(-1)^J \, \delta_{Jj}}{\sqrt{2J+1}} (-1)^{-J} \sqrt{J(J+1)(2J+1)} \sum_{c} \langle a|c\rangle \underbrace{\left(c, J \| \hat{\mathbb{V}}^{(1)} \| b, J\right)}_{\langle c| \left(J \| \hat{\mathbb{V}}^{(1)} \| J\right) |b\rangle} = \\
&= \frac{\delta_{Jj}}{\sqrt{2J+1}} \sqrt{J(J+1)(2J+1)} \left(a, J \| \hat{\mathbb{V}}^{(1)} \| b, J\right) = \\
&= \delta_{Jj} \sqrt{J(J+1)} \left(a, J \| \hat{\mathbb{V}}^{(1)} \| b, J\right) .
\end{aligned}
$$