

# Cvičení 5

## Wigner-Eckartův teorém, tenzorové operátory

Domácí úkol – Magnetický moment (termín odevzdání: 21.3.2018)

1. Nechť  $\hat{\mathbf{J}}$  je operátor momentu hybnosti a  $|Jm\rangle$  společný vlastní vektor jeho kvadrátu  $\hat{\mathbf{J}}^2$  a třetí složky  $\hat{J}_3$ . Dokažte, že pro maticové elementy diagonální v  $J$  a pro libovolný vektorový operátor  $\hat{\mathbf{V}}$  platí tzv. *projekční teorém*

$$\langle JM|\hat{\mathbf{V}}|Jm\rangle = \left\langle JM\left|\frac{\hat{\mathbf{J}}\cdot\hat{\mathbf{V}}}{\hat{\mathbf{J}}^2}\hat{\mathbf{J}}\right|Jm\right\rangle.$$

2. Dva nezávislé impulsmomenty  $\hat{\mathbf{L}}$  (orbitální moment hybnosti) a  $\hat{\mathbf{S}}$  (vnitřní spin systému), které spolu komutují,  $[\hat{\mathbf{L}}, \hat{\mathbf{S}}] = 0$ , složíme na celkový impulsmoment

$$\hat{\mathbf{J}} = \hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{S}}.$$

Nechť  $|(ls)jm\rangle$  jsou vlastní vektory operátorů  $\hat{\mathbf{L}}^2$ ,  $\hat{\mathbf{S}}^2$ ,  $\hat{\mathbf{J}}^2$ ,  $\hat{J}_3$ :

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{L}}^2 |(ls)jm\rangle &= l(l+1) |(ls)jm\rangle, \\ \hat{\mathbf{S}}^2 |(ls)jm\rangle &= s(s+1) |(ls)jm\rangle, \\ \hat{\mathbf{J}}^2 |(ls)jm\rangle &= j(j+1) |(ls)jm\rangle, \\ \hat{J}_3 |(ls)jm\rangle &= m |(ls)jm\rangle.\end{aligned}$$

Definujme operátor (*magnetický moment*)<sup>1</sup>

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = g_L \hat{\mathbf{L}} + g_S \hat{\mathbf{S}},$$

přičemž  $g_L$ ,  $g_S$  jsou reálné parametry, které se nazývají *gyromagnetické faktory* (*g-faktory*)<sup>2</sup>. Spočítejte diagonální maticový element<sup>3</sup>

$$\langle (ls)jm|\hat{\boldsymbol{\mu}}|(ls)jm\rangle.$$

---

<sup>1</sup>Magnetický moment je vyjádřen v jednotkách Bohrova (jaderného) magnetonu

$$\mu_0 = \frac{q\hbar}{2M},$$

kde  $e$  je elementární náboj,  $M$  je hmotnost elektronu (nukleonu). Uvedený výraz platí v jednotkách SI, v Gaussovských elektromagnetických jednotkách se objevuje ještě rychlost světla  $c$  ve jmenovateli.

<sup>2</sup>Gyromagnetické faktory pro nejběžnější částice jsou

$$\begin{aligned}g_{\text{elektron}} &= -2.00231930419922 \approx 2 \\ g_{\text{mion}} &= -2.0023318414 \approx 2 \\ g_{\text{neutron}} &= -3.82608545 \\ g_{\text{proton}} &= 5.585694702\end{aligned}$$

(znaménka bývají občas definována obráceně).

<sup>3</sup>Veličina s největší projekcí se nazývá *magnetický moment částice*,

$$\mu \equiv \langle (ls)jj|\mu_z|(ls)jj\rangle.$$