Cvičení 6

Wigner-Eckartův teorém, tenzorové operátory

Domácí úkol – Sférické komponenty tenzoru *(termín odevzdání: 28.3.2018)*

Jsou zadány dva libovolné vektorové operátory $\hat{\mathbf{R}}$, $\hat{\mathbf{S}}$ s kartézskými komponentami $\hat{\mathsf{R}}_j$, $\hat{\mathsf{S}}_k$. Kartézské složky tenzoru vzniklého jejich dyadickým součinem označíme $\hat{\mathsf{T}}_{jk} = \hat{\mathsf{R}}_j \hat{\mathsf{S}}_k$.

1. Pomocí vztahu pro tenzorový součin tenzorových operátorů

$$\hat{\mathsf{T}}^{(\lambda)}_{\mu} \equiv \sum_{\mu_1, \mu_2} \mathcal{C}^{\lambda\,\mu}_{\lambda_1\,\mu_1\;\lambda_2\,\mu_2} \hat{\mathsf{R}}^{(\lambda_1)}_{\mu_1} \hat{\mathsf{S}}^{(\lambda_2)}_{\mu_2}$$

   nalezněte sférické komponenty tenzorů $\hat{\mathbb{T}}^{(0)}$, $\hat{\mathbb{T}}^{(1)}$, $\hat{\mathbb{T}}^{(2)}$ a vyjádřete je pomocí $\hat{\mathsf{T}}_{jk}$.

2. Ukažte, že rozepíšeme-li kartézské komponenty tenzoru $\hat{\mathsf{T}}_{jk}$ (což je libovolný tenzor 2. řádu) jako

$$\hat{\mathsf{T}}_{jk} = \hat{\mathsf{J}}_{jk} + \hat{\mathsf{A}}_{jk} + \hat{\mathsf{B}}_{jk},$$

   kde

$$\begin{aligned}
\hat{\mathsf{J}}_{jk} &\equiv \frac{1}{3}(\hat{\mathsf{T}}_{11} + \hat{\mathsf{T}}_{22} + \hat{\mathsf{T}}_{33})\delta_{jk} \\
\hat{\mathsf{A}}_{jk} &\equiv \frac{1}{2}(\hat{\mathsf{T}}_{jk} - \hat{\mathsf{T}}_{kj}) \\
\hat{\mathsf{B}}_{jk} &\equiv \frac{1}{2}(\hat{\mathsf{T}}_{jk} + \hat{\mathsf{T}}_{kj}) - \hat{\mathsf{J}}_{jk}
\end{aligned}$$

   ($\hat{\mathbf{J}}$ je násobek jednotkového tenzoru, $\hat{\mathbf{A}}$ je antisymetrický tenzor a $\hat{\mathbf{B}}$ je symetrický tenzor s nulovou stopou), pak $\hat{\mathbf{J}}$, $\hat{\mathbf{A}}$, resp. $\hat{\mathbf{B}}$ tvoří právě kartézské komponenty tenzorového operátoru nultého řádu $\hat{\mathbb{T}}^{(0)}$, prvního řádu $\hat{\mathbb{T}}^{(1)}$, resp. druhého řádu $\hat{\mathbb{T}}^{(2)}$.