

7 WKB aproximace

WKB¹³ je kvaziklasická aproximace jednorozměrné Schrödingerovy rovnice

$$-\frac{\hbar^2}{2M}\psi''(x) + V(x)\psi(x) = E\psi(x). \quad (7.0.1)$$

Rovnici přepíšeme do tvaru

$$\psi''(x) = -\frac{p^2}{\hbar^2}\psi(x), \quad (7.0.2)$$

kde

$$p = \pm\sqrt{2M[E - V(x)]} \quad (7.0.3)$$

je hybnost částice. Vlnovou funkci hledáme ve tvaru

$$\psi(x) = A(x)e^{\frac{i}{\hbar}S(x)}, \quad (7.0.4)$$

kde obě funkce $A(x), S(x)$ jsou reálné. Dosadíme-li do Schrödingerovy rovnice (7.0.2), dostaneme dvě rovnice (pro reálnou a imaginární část)

$$\begin{aligned} \hbar^2 \frac{A''(x)}{A(x)} - [S'(x)]^2 &= -p^2, \\ 2A'(x)S'(x) + A(x)S''(x) &= 0. \end{aligned} \quad (7.0.5)$$

Řešení druhé rovnice je

$$[A^2(x)S'(x)]' = 0 \quad \implies \quad A(x) = \frac{C}{S'(x)}. \quad (7.0.6)$$

V první rovnici zanedbáme člen úměrný \hbar^2 (navíc předpokládáme, že „oscilace“ amplitudy $A(x)$ jsou mnohem menší než amplituda sama), čímž dostaneme

$$[S'(x)]^2 = p^2 \quad \implies \quad S'(x) = \pm|p(x)| \quad \implies \quad S(x) = \pm \int_{x_0}^x |p(x')| dx', \quad (7.0.7)$$

což je výraz pro klasickou akci.

Vlnová funkce tedy je

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{|p(x)|}} \left[C e^{\frac{i}{\hbar} \int_{x_0}^x |p(x')| dx'} + D e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{x_0}^x |p(x')| dx'} \right], \quad (7.0.8)$$

kde x_0 je nějaký bod, od kterého integrujeme, a C, D jsou normalizační konstanty.

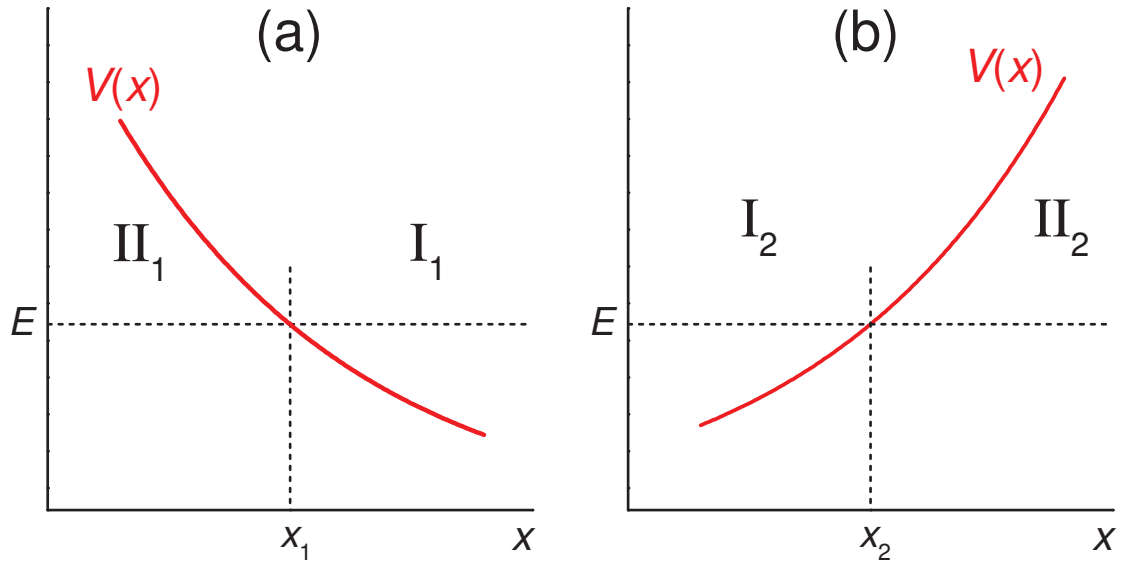
Pokud jsme v kinematicky nedostupné oblasti, kde $E < V(x)$, vlnová funkce zní

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{|p(x)|}} \left[E e^{\frac{1}{\hbar} \int_{x_0}^x |p(x')| dx'} + F e^{-\frac{1}{\hbar} \int_{x_0}^x |p(x')| dx'} \right], \quad (7.0.9)$$

Sešívání vlnové funkce v bodech obratu

V bodech obratu $p(x_0) = 0$, které oddělují kinematicky dostupnou oblast, vlnová funkce WKB aproximace diverguje. Navázání lze provést buď přes komplexní rozšíření souřadnice [1], nebo přes aproximaci potenciálu v okolí bodu obratu pomocí lineární funkce a nalezení přesného řešení Schrödingerovy rovnice dané Airyho funkcemi [?].

¹³Gregor Wentzel, Hendrik Kramers, Léon Brillouin



Obrázek 2: Body obratu pro navazování WKB vlnových funkcí.

- Pokud máme bod obratu x_1 v místě, kde potenciál klesá, $V'(x_1) < 0$, viz obrázek 2(a), vlnová funkce je

$$\begin{aligned}\psi_{\text{II}_1}(x) &= \frac{C_1}{\sqrt{|p(x)|}} e^{-\frac{1}{\hbar} \int_{x_1}^{x_1} |p(x')| dx'} , \\ \psi_{\text{I}_1}(x) &= \frac{2C_1}{\sqrt{|p(x)|}} \sin \left[\frac{1}{\hbar} \int_{x_1}^x p(x') dx' + \frac{\pi}{4} \right]\end{aligned}\quad (7.0.10)$$

nebo

$$\begin{aligned}\psi_{\text{II}_1}(x) &= \frac{C_1}{\sqrt{|p(x)|}} e^{\frac{1}{\hbar} \int_x^{x_1} |p(x')| dx'} , \\ \psi_{\text{I}_1}(x) &= \frac{C_1}{\sqrt{|p(x)|}} \cos \left[\frac{1}{\hbar} \int_x^{x_1} p(x') dx' + \frac{\pi}{4} \right]\end{aligned}\quad (7.0.11)$$

kde oblast II_1 odpovídá $x < x_1$ a oblast I_1 odpovídá $x > x_1$. Integrační meze v integrálech jsou zvoleny tak, aby vždy spodní mez byla menší než horní mez.

- Pro bod obratu x_2 v místě rostoucího potenciálu, $V'(x_2) > 0$, viz obrázek 2(b), je

$$\begin{aligned}\psi_{\text{I}_2}(x) &= \frac{2C_2}{\sqrt{|p(x)|}} \sin \left[\frac{1}{\hbar} \int_x^{x_2} p(x') dx' + \frac{\pi}{4} \right] , \\ \psi_{\text{II}_2}(x) &= \frac{C_2}{\sqrt{|p(x)|}} e^{-\frac{1}{\hbar} \int_{x_2}^x |p(x')| dx'} ,\end{aligned}\quad (7.0.12)$$

nebo

$$\begin{aligned}\psi_{\text{I}_2}(x) &= \frac{C_2}{\sqrt{|p(x)|}} \cos \left[\frac{1}{\hbar} \int_x^{x_2} p(x') dx' + \frac{\pi}{4} \right] , \\ \psi_{\text{II}_2}(x) &= \frac{C_2}{\sqrt{|p(x)|}} e^{\frac{1}{\hbar} \int_{x_2}^x |p(x')| dx'} ,\end{aligned}\quad (7.0.13)$$

kde oblast I_2 odpovídá $x < x_2$ a oblast II_2 odpovídá $x > x_2$.

Bohrovo-Sommerfeldovo kvantování

Pokud máme na dané energii jen dva body obratu, pak musí platit $\psi_{I_1}(x) = \psi_{I_2}(x)$, což je splněno, pokud

- $C_1 = C_2$ a zároveň

$$\sin \left[\frac{1}{\hbar} \int_{x_1}^x p(x') dx' + \frac{\pi}{4} \right] = \sin \left[\frac{1}{\hbar} \int_x^{x_2} p(x') dx' + \frac{\pi}{4} \right], \quad (7.0.14)$$

neboli

$$\frac{1}{\hbar} \int_{x_1}^x p(x') dx' + \frac{\pi}{4} + n\pi = \frac{1}{\hbar} \int_x^{x_2} p(x') dx' + \frac{\pi}{4}, \quad (7.0.15)$$

nebo vhodněji pokud

- $C_1 = -C_2$ a zároveň

$$\sin \left[\frac{1}{\hbar} \int_{x_1}^x p(x') dx' + \frac{\pi}{4} \right] = -\sin \left[\frac{1}{\hbar} \int_x^{x_2} p(x') dx' + \frac{\pi}{4} \right], \quad (7.0.16)$$

neboli

$$\frac{1}{\hbar} \int_{x_1}^x p(x') dx' + \frac{\pi}{4} + n\pi = -\frac{1}{\hbar} \int_x^{x_2} p(x') dx' - \frac{\pi}{4}. \quad (7.0.17)$$

Z poslední rovnosti plyne *Bohrova-Sommerfeldova kvantovací podmínka*

$$\oint p(x') dx' = 2 \int_{x_1}^{x_2} p(x') dx' = 2\pi\hbar \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad (7.0.18)$$

kde $n \in \mathbb{N}_0$. Tento výraz platí jen pro „měkké“ body obratu. Za každý „tvrdý“ bod obratu (obrat o nekonečně vysokou bariéru) je nutné do závorky přidat ještě $\frac{1}{4}$.

Značení

Pro usnadnění značení zavedeme zjednodušenou notaci, kterou budeme v následujících příkladech využívat:

$$\lambda \equiv \frac{C}{\sqrt{|p(x)|}}$$

$$I_a^b \equiv \frac{1}{\hbar} \int_a^b |p(x')| dx'. \quad (7.0.19)$$

Navazovací podmínky (7.0.10) se pak dají zapsat jako

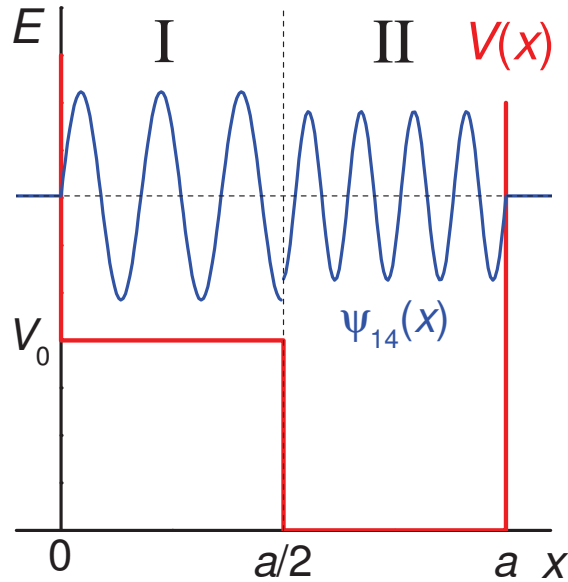
$$\psi_{II_1}(x) = \lambda_1 e^{-I_x^{x_1}} \quad \psi_{I_1}(x) = 2\lambda_2 \sin \left[I_{x_1}^x + \frac{\pi}{4} \right]. \quad (7.0.20)$$

7.1 Nekonečně hluboká pravoúhlá jáma se schodem

Částice o hmotnosti M se pohybuje v potenciálu

$$V(x) = \begin{cases} \infty & x < 0 \\ V_0 & 0 < x < \frac{a}{2} \\ 0 & \frac{a}{2} < x < a \\ \infty & x > a \end{cases} \quad (7.1.1)$$

viz obrázek 3. Nalezněte WKB vlnovou funkci a spektrum pro $E > V_0$.



Obrázek 3: Nekonečně hluboká pravoúhlá jáma se schodem. Potenciál červeně. Modře zobrazena 14. vlnová funkce pro hodnoty parametrů $a = V_0 = 2$, $M = 1$, $\hbar = 0.1$. Příslušná energie je $E_{14} = 3,52$.

Řešení:

Kinematicky dostupné oblasti označíme

$$\begin{aligned} \text{I: } & 0 < x < \frac{a}{2}, \\ \text{II: } & \frac{a}{2} < x < a. \end{aligned}$$

Klasická hybnost v těchto oblastech pak je

$$\begin{aligned} p_{\text{I}} &= \sqrt{2M(E - V_0)}, \\ p_{\text{II}} &= \sqrt{2ME} \end{aligned} \quad (7.1.2)$$

(hybnost je v uvedených intervalech konstantní, nezávisí na souřadnici). Zintegrováním v mezích $(0, x)$ dostaneme akci

$$\begin{aligned} S_{\text{I}}(x) &= \int_0^x p_{\text{I}} dx' = xp_{\text{I}}, \\ S_{\text{II}}(x) &= \int_0^{\frac{a}{2}} p_{\text{I}} dx' + \int_{\frac{a}{2}}^x p_{\text{II}} dx' = \frac{a}{2} p_{\text{I}} + \left(x - \frac{a}{2}\right) p_{\text{II}}. \end{aligned} \quad (7.1.3)$$

Vlnová funkce tedy je

$$\begin{aligned} \psi_{\text{I}}(x) &= \frac{1}{\sqrt{|p_{\text{I}}|}} \left[C \sin \frac{S_{\text{I}}(x)}{\hbar} + D \cos \frac{S_{\text{I}}(x)}{\hbar} \right], \\ \psi_{\text{II}}(x) &= \frac{1}{\sqrt{|p_{\text{II}}|}} \left[C \sin \frac{S_{\text{II}}(x)}{\hbar} + D \cos \frac{S_{\text{II}}(x)}{\hbar} \right] \end{aligned} \quad (7.1.4)$$

(od komplexních exponenciál jsme přešli k funkcím sin, cos). Díky tomu, že jsme obě akce vyjádřili od stejného počátečního bodu $x_0 = 0$, jsou konstanty C, D v obou rovnicích stejné.

V dalším kroku aplikujeme okrajové podmínky:

$$\begin{aligned}\psi_{\text{I}}(0) = 0 & \implies D = 0, \\ \psi_{\text{II}}(a) = 0 & \implies \sin \frac{S_{\text{II}}(x)}{\hbar} = 0.\end{aligned}\quad (7.1.5)$$

Z druhé rovnice vyplývá postupně

$$\begin{aligned}S_{\text{II}}(x) &= \pi n \\ \frac{a}{2\hbar} \left[\sqrt{2M(E - V_0)} + \sqrt{2ME} \right] &= \pi n \\ E - \frac{V_0}{2} + \sqrt{E(E - V_0)} &= 2 \underbrace{\frac{\pi^2 \hbar^2 n^2}{2Ma^2}}_{E_n^{(0)}} \\ E_n^{(0)} - E + \frac{V_0}{2} &= \sqrt{E(E - V_0)} \\ E_n \equiv E &= E_n^{(0)} + \frac{V_0}{2} + \frac{V_0^2}{16E_n^{(0)}},\end{aligned}\quad (7.1.6)$$

kde jsme označili $E_n^{(0)}$ n -tou hladinu pravoúhlé jámy, $n \in \mathbb{N}$. Pro energie dostatečně vysoko nad V_0 vymizí poslední člen, což znamená, že částice cítí schod o poloviční výšce rozprostřený po celém dnu jámy.

Explicitně vyjádřená vlnová funkce je

$$\begin{aligned}\psi_{\text{I},n}(x) &= \frac{c}{\sqrt[4]{2M(E_n - V_0)}} \sin \left\{ \frac{\sqrt{2M(E_n - V_0)}}{\hbar} x \right\}, \\ \psi_{\text{II},n}(x) &= \frac{c}{\sqrt[4]{2ME_n}} \sin \left\{ \frac{\sqrt{2M(E_n - V_0)}}{\hbar} \frac{a}{2} + \frac{\sqrt{2ME_n}}{\hbar} \left(x - \frac{1}{2} \right) \right\},\end{aligned}\quad (7.1.7)$$

kde energie jsou dány vzorcem (7.1.6).

WKB vlnová funkce *není spojitá* v bodě $x = \frac{a}{2}$, což je patrné z příkladu na obrázku 3.

7.2 Harmonický oscilátor

1. Použitím WKB metody odvoďte spektrum a vlnové funkce jednorozměrného harmonického oscilátoru popsaného (již známým) Hamiltoniánem

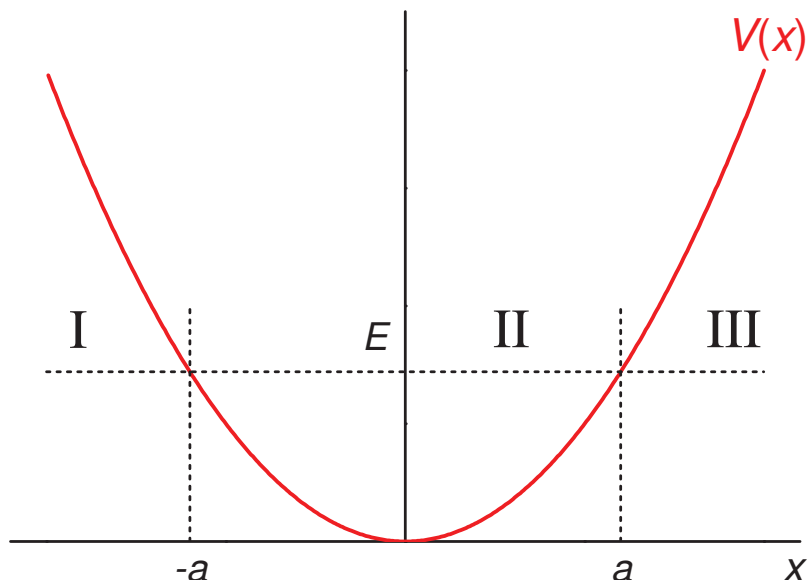
$$\hat{H} = \frac{1}{2M} \hat{p}^2 + \frac{1}{2} M \Omega^2 \hat{x}^2$$

(M je hmotnost částice, která se v potenciálu pohybuje, Ω úhlová frekvence kmitů).

2. Nakreslete graf vlnové funkce pro dvacátou energetickou hladinu ($n = 20$) a porovnejte s přesnou vlnovou funkcí, která je řešením Schrödingerovy rovnice a která je určena Hermitovými polynomy

$$\phi_n(x) = \sqrt[4]{\frac{M\Omega}{\pi\hbar}} \frac{1}{\sqrt{n!2^n}} H_n(\xi) e^{-\xi^2}, \quad \xi = \sqrt{\frac{M\Omega}{\hbar}} x.\quad (7.2.1)$$

3. Na základě tohoto srovnání diskutujte přesnost WKB metody.



Obrázek 4: Potenciál harmonického oscilátoru s vyznačenými oblastmi pro WKB řešení.

Řešení:

Potenciál harmonického oscilátoru je znázorněn na obrázku 4. Body obratu jsou $\pm a$, kde

$$a = \sqrt{\frac{2E}{M\Omega^2}}. \quad (7.2.2)$$

Vlnová funkce v oblasti I (III) musí být WKB vlna, která ubývá pro $x \rightarrow -\infty$ ($x \rightarrow \infty$), takže

$$\begin{aligned} \psi_{\text{I}}(x) &= \frac{C}{\sqrt{|p(x)|}} e^{-\frac{1}{\hbar} \int_x^{-a} |p(x')| dx'} \equiv \lambda e^{-I_x^{-a}}, \\ \psi_{\text{III}}(x) &= \lambda' e^{-I_x^a}, \end{aligned} \quad (7.2.3)$$

kde jsme použili značení (7.0.19). Klasická hybnost je

$$p(x) = \sqrt{2M \left(E - \frac{1}{2} M \Omega^2 x^2 \right)}. \quad (7.2.4)$$

Pomocí sešívacích vztahů (7.0.10) navážeme vlnu v oblasti II:

$$\psi_{\text{II}}(x) = 2\lambda \sin \left[I_{-a}^x + \frac{\pi}{4} \right] = 2\lambda' \sin \left[I_x^a + \frac{\pi}{4} \right]. \quad (7.2.5)$$

Dostáváme tedy, že $\lambda = -\lambda'$ a

$$I_{-a}^a = \pi \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad (7.2.6)$$

což jsou Bohrovy-Sommerfeldovy kvantovací podmínky.

Zbývá spočítat integrál

$$\begin{aligned}
 I_{x_1}^{x_2} &= \frac{1}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} p(x) dx = \frac{1}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{2M \left(E - \frac{1}{2} M \Omega^2 x^2 \right)} \\
 &= \frac{\sqrt{2ME}}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 - \underbrace{\frac{M\Omega^2}{2E}}_{\frac{1}{a^2}} x^2} dx = \left| \begin{array}{l} y = \frac{x}{a} \\ dx = a dy \end{array} \right| \\
 &= \frac{2E}{\hbar\Omega} \int_{\frac{x_1}{a}}^{\frac{x_2}{a}} \sqrt{1 - y^2} dy, \tag{7.2.7}
 \end{aligned}$$

přičemž primitivní funkce k poslednímu integrálu je

$$\begin{aligned}
 \int \sqrt{1 - y^2} dy &= \left| \begin{array}{l} y = \sin z \\ dy = \cos z dz \end{array} \right| = \int \sqrt{1 - \sin^2 z} \cos z dz \\
 &= \int \cos^2 z dz = \int \frac{1 + \cos 2z}{2} dz = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{2} \sin 2z \right) \\
 &= \frac{1}{2} (z + \sin z \cos z) = \frac{1}{2} \left(\arcsin y + y \sqrt{1 - y^2} \right), \tag{7.2.8}
 \end{aligned}$$

takže

$$I_{x_1}^{x_2} = \frac{E}{\hbar\Omega} \left[\arcsin y + y \sqrt{1 - y^2} \right]_{\frac{x_1}{a}}^{\frac{x_2}{a}}. \tag{7.2.9}$$

Právě vypočtený integrál dosadíme do kvantovacích podmínek (7.2.6), čímž získáme

$$I_{-a}^a = \frac{E}{\hbar\Omega} \pi = \pi \left(n + \frac{1}{2} \right) \implies E_n = \hbar\Omega \left(n + \frac{1}{2} \right), \tag{7.2.10}$$

což je přesné spektrum harmonického oscilátoru.

Dopodčítáme ještě vlnové funkce. Vlnová funkce v oblasti II je

$$\begin{aligned}
 \psi_{II}(x) &= 2\lambda \sin \left\{ \frac{E}{\hbar\Omega} \left[\arcsin y + y \sqrt{1 - y^2} \right]_{\frac{x}{a}}^{\frac{a}{a}=1} + \frac{\pi}{4} \right\} \\
 &= 2\lambda \sin \left[\frac{E}{\hbar\Omega} \left(\underbrace{\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{x}{a}}_{\arccos \frac{x}{a}} - \frac{x}{a} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \right) + \frac{\pi}{4} \right] \\
 &= \frac{2C}{\sqrt{p(x)}} \sin \left[\frac{E}{\hbar\Omega} \left(\arccos \frac{x}{a} - \frac{x}{a} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \right) + \frac{\pi}{4} \right] \tag{7.2.11}
 \end{aligned}$$

V klasicky zakázaných oblastech I a III je integrál

$$\begin{aligned}
 I_{x_1}^{x_2} &= \frac{2E}{\hbar\Omega} \int_{\frac{x_1}{a}}^{\frac{x_2}{a}} \sqrt{y^2 - 1} dy = \frac{E}{\hbar\Omega} \left[-\operatorname{arccosh} y + y \sqrt{y^2 - 1} \right]_{\frac{x_1}{a}}^{\frac{x_2}{a}} \\
 &= \frac{E}{\hbar\Omega} \left[-\ln \left(y + \sqrt{y^2 - 1} \right) + y \sqrt{y^2 - 1} \right]_{\frac{x_1}{a}}^{\frac{x_2}{a}}, \tag{7.2.12}
 \end{aligned}$$

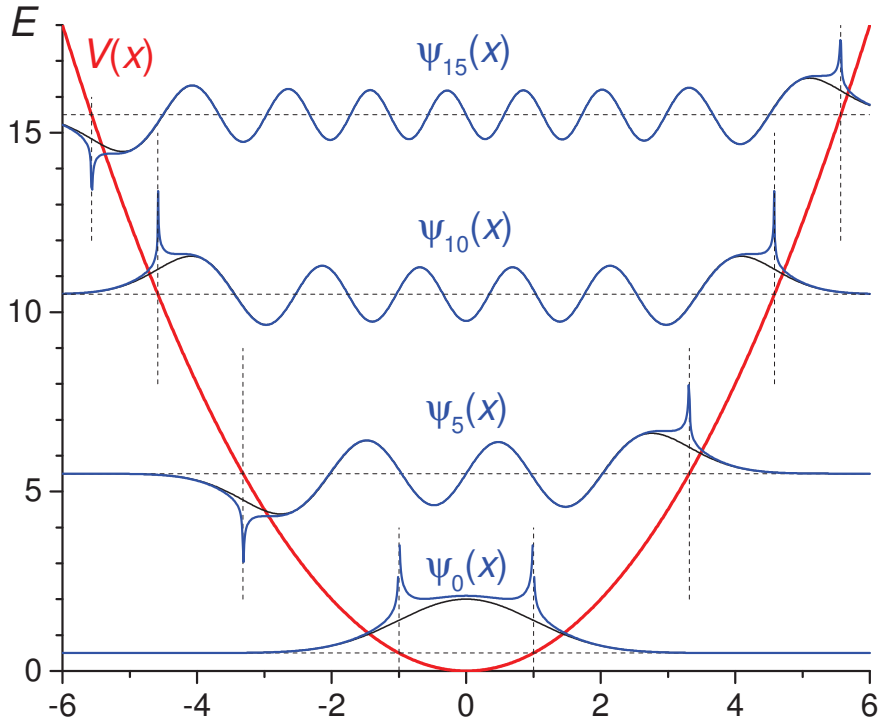
takže

$$\begin{aligned}\psi_{\text{I}}(x) &= (-1)^n \lambda e^{\left[-\frac{E}{\hbar\Omega} \left[-\ln \left(y + \sqrt{y^2 - 1} \right) + y\sqrt{y^2 - 1} \right] \right]^{-1} \frac{x}{a}} \\ &= (-1)^n \frac{C}{\sqrt{|p(x)|}} e^{\frac{E}{\hbar\Omega} \left[\ln \left(-\frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} \right) + \frac{x}{a} \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} \right]}\end{aligned}\quad (7.2.13)$$

a

$$\psi_{\text{III}}(x) = \lambda e^{-\frac{E}{\hbar\Omega} \left[-\operatorname{arccosh} y + x\sqrt{y^2 - 1} \right]_1^{\frac{x}{a}}} = \frac{C}{\sqrt{|p(x)|}} e^{-\frac{E}{\hbar\Omega} \left[-\operatorname{arccosh} \frac{x}{a} + \frac{x}{a} \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} \right]}\quad (7.2.14)$$

Konstanta C se určí z normalizace, přičemž pro n velké a $\hbar = \Omega = M = 1$ konverguje k hodnotě $C \rightarrow 1/\sqrt{2\pi}$.



Obrázek 5: Vlnové funkce harmonického oscilátoru s $\Omega = M = \hbar = 1$ pro energie $E_0 = \frac{1}{2}$, $E_5 = \frac{11}{2}$, $E_{10} = \frac{21}{2}$, $E_{15} = \frac{31}{2}$. Přesné vlnové funkce dané Hermitovými polynomy jsou zobrazeny černými plnými čarami, odpovídající WKB aproximace jsou zobrazeny modrými plnými čarami (WKB vlnové funkce divergují v klasických bodech obratu, tj. v bodech, kde $E_n = V(x)$). WKB vlnové funkce jsou normalizované faktorem $1/\sqrt{2\pi}$.

Několik vlnových funkcí je znázorněno na obrázku 5. Je vidět, že kromě bodu obratu WKB vlnová funkce velmi přesně aproximuje přesnou vlnovou funkci harmonickému oscilátoru.

7.3 α rozpad

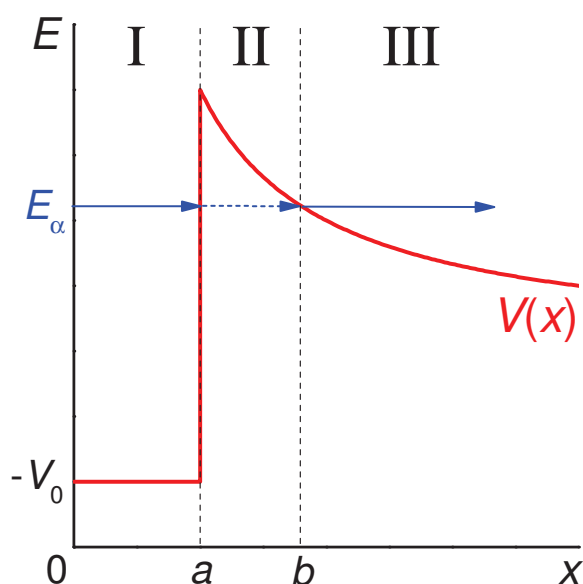
α rozpad, například rozpad radia na radon¹⁴



lze modelovat velmi jednoduchým modelem, který i přes svoji jednoduchost dává kvalitativní souhlas s experimentem. Budeme si představovat, že α částice vázaná v jádře tuneluje Coulombickou bariérou. Celý problém popíšeme jednorozměrným potenciálem (viz obrázek 6)

$$V(x) = \begin{cases} -V_0 & \text{pro } |x| < a \\ \frac{Z_\alpha Z \gamma}{x} & \text{pro } |x| > a, \end{cases}$$

přičemž Z je protonové číslo jádra, $Z_\alpha = 2$ protonové číslo α částice, V_0 je kladný parametr, $\gamma = \alpha \hbar c = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}$ a α je konstanta jemné struktury.



Obrázek 6: Tunelování α částice o energii E_α z jádra přes Coulombickou bariéru.

1. Ve WKB přiblížení odvoďte tzv. *Gammovův koeficient průniku*

$$T = \exp \left[-\frac{2}{\hbar} \int_a^b |p(x)| dx \right], \quad (7.3.2)$$

kde $|p(x)|$ je absolutní hodnota „hybnosti“ částice v klasicky nedostupné oblasti vymezené body a , b , které ohraničují bariéru.

2. Nalezněte T pro uvažovaný model α rozpadu.
3. Střední dobu života lze aproximovat vztahem $\tau = \frac{1}{P_\alpha RT}$, kde P_α je pravděpodobnost, že se v jádře vydělí α částice (budeme předpokládat, že tato

¹⁴ Použitá notace je ${}^A_Z\text{X}$, kde $A = N + Z$ je celkový počet nukleonů izotopu X, N je počet neutronů a Z počet protonů = náboj jádra.

pravděpodobnost bude pro uvažovaná jádra ≈ 1) a R je počet „narázů“ α částice na bariéru za sekundu. Odhadněte R a spočítejte τ a poločas rozpadu $T_{1/2}$.

Pro poloměr atomu použijte přibližný vztah $a = a_0 \sqrt[3]{A}$, A je atomové číslo a $a_0 \doteq 1.2$ fm.

4. Porovnejte číselně s hodnotami tří izotopů

izotop	E (MeV)	$T_{1/2}$
${}^{144}_{60}\text{Nd}$	1.8	$2 \cdot 10^{15}$ let
${}^{224}_{88}\text{Ra}$	5.7	3.6 dne
${}^{212}_{84}\text{Po}$	8.8	$0.3 \mu\text{s}$

5. Určete de Broglieovy vlnové délky α částic v jádrech z tabulky a porovnejte je s rozměry jádra. Je WKB aproximace oprávněná?

Řešení:

1. Tunelování rozdělíme na tři oblasti:

- Oblast I: $x < a$, $E > V(x)$, vnitřek jádra.
- Oblast II: $a < x < b$, $E < V(x)$, oblast v bariéře.
- Oblast III: $b < x$, $E > V(x)$, oblast vně jádra.

V oblasti III vně jádra budeme uvažovat jen prošlou vlnu,

$$\begin{aligned} \psi_{\text{III}}(x) &= \frac{C}{\sqrt{|p(x)|}} e^{\frac{i}{\hbar} \int_b^x |p(x')| dx' + i\frac{\pi}{4}} = \lambda e^{i(I_b^x + \frac{\pi}{4})} \\ &= \lambda \cos \left[I_b^x + \frac{\pi}{4} \right] + i\lambda \sin \left[I_b^x + \frac{\pi}{4} \right], \end{aligned} \quad (7.3.3)$$

přičemž v zápise využíváme značení (7.0.19) a rovnou jsme přidali fázi $\pi/4$, kterou budeme potřebovat v dalším kroku při navazování. Vlnovou funkci navážeme do oblasti II pomocí vztahů (7.0.10)–(7.0.11),

$$\psi_{\text{II}}(x) = \lambda e^{I_x^b} + \frac{i}{2} \lambda e^{-I_x^b}. \quad (7.3.4)$$

Nyní rozepíšeme integrál

$$\int_x^b = \int_a^b - \int_a^x \quad \Longleftrightarrow \quad I_x^b = I_a^b - I_a^x \quad (7.3.5)$$

a označíme

$$E \equiv e^{-I_a^b} = e^{-\frac{i}{\hbar} \int_a^b |p(x)| dx}, \quad (7.3.6)$$

takže

$$\psi_{\text{II}}(x) = \frac{\lambda}{E} e^{-I_a^x} + \frac{i}{2} \lambda E e^{I_a^x}. \quad (7.3.7)$$

Aplikací sešívacích podmínek (7.0.12)–(7.0.13) navážeme na vlnovou funkci v oblasti I:

$$\begin{aligned}\psi_I(x) &= \frac{2\lambda}{E} \sin \left[I_a^x + \frac{\pi}{4} \right] + \frac{i}{2} \lambda E \cos \left[I_a^x + \frac{\pi}{4} \right] \\ &= \underbrace{-C \left(\frac{1}{E} - \frac{E}{4} \right) e^{i\frac{\pi}{4}}}_{A} \frac{1}{\sqrt{|p(x)|}} e^{iI_a^x} + iC \underbrace{\left(\frac{1}{E} + \frac{E}{4} \right) e^{-i\frac{\pi}{4}}}_{B} \frac{1}{\sqrt{|p(x)|}} e^{-iI_a^x}.\end{aligned}\quad (7.3.8)$$

Transmisní koeficient je

$$T = \left| \frac{C}{A} \right|^2 = \frac{1}{\left(\frac{1}{E} - \frac{E}{4} \right)^2} \approx E^2, \quad (7.3.9)$$

přičemž poslední rovnost platí za předpokladu $E \ll 1$, což musí být splněno, aby bylo vůbec možné pro tento typ úlohy WKB aproximaci použít. Dosazením za E dostaneme hledaný Gammovův faktor (7.3.2).

2. Využijeme právě odvozený vztah pro pravděpodobnost průniku bariérou (7.3.2). Klasická hybnost α částice o energii E_α v oblasti Coulombické části potenciálu je

$$p(x) = \sqrt{2M \left(E_\alpha - \frac{Z_\alpha Z \gamma}{x} \right)}, \quad (7.3.10)$$

a druhý bod obratu získáme z rovnice

$$V(x) = E_\alpha \quad \Longrightarrow \quad b = \frac{Z_\alpha Z \gamma}{E_\alpha}, \quad (7.3.11)$$

takže

$$\begin{aligned}I_a^b &= \frac{1}{\hbar} \int_a^b |p(x)| dx = \frac{\sqrt{2ME_\alpha}}{\hbar} \int_a^b \sqrt{\frac{Z_\alpha Z \gamma}{E_\alpha x} - 1} dx = \left| \begin{array}{l} u = \frac{x}{b} \\ dx = b du \end{array} \right| \\ &= \frac{Z_\alpha Z \gamma}{\hbar} \underbrace{\sqrt{\frac{2M}{E_\alpha}}}_{\kappa} \int_{x=a}^{x=b} \sqrt{\frac{1}{u} - 1} du = \left| \begin{array}{l} u = y^2 \\ du = 2y dy \end{array} \right| \\ &= 2\kappa \int_{x=a}^{x=b} \sqrt{1 - y^2} dy,\end{aligned}\quad (7.3.12)$$

což je integrál, který jsme počítali u harmonického oscilátoru (7.2.8). Dosadíme li, dostaneme

$$\begin{aligned}I_a^b &= \kappa \left[y\sqrt{1 - y^2} + \arcsin y \right]_{x=a}^{y=b} \\ &= \kappa \left[\sqrt{u}\sqrt{1 - u} + \arcsin \sqrt{u} \right]_{u=\frac{a}{b}}^1 = \\ &= \kappa \left[\arccos \sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{a}{b}} \left(1 - \frac{a}{b} \right) \right]\end{aligned}\quad (7.3.13)$$

a pravděpodobnost průniku je

$$T = \exp \left\{ \frac{2Z_\alpha Z \gamma}{\hbar} \sqrt{\frac{2M}{E_\alpha}} \left[\arccos \sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{a}{b}} \left(1 - \frac{a}{b} \right) \right] \right\} \quad (7.3.14)$$

kde b je dáno vzorcem (7.3.11) a a je poloměr jádra spočtený pomocí vztahu uvedeného v zadání.

3. Počet „nárazů“ α částice na bariéru odhadneme jako

$$R = \frac{v_\alpha}{2a}, \quad (7.3.15)$$

kde v_α je rychlost α částice v jádře. Tu určíme z kinetické energie (počítáme klasicky—rychlost vylétávajících α částic je malá ve srovnání s rychlostí světla, viz tabulka níže)

$$E_\alpha = v_\alpha^2/2M, \quad (7.3.16)$$

přičemž energie je dána jako rozdíl klidové hmotnosti $M_{Z^A}^X$ jádra vstupujícího do reakce a klidové hmotnosti produktů (jádro $M_{Z-2}^{A-4}Y$ + jádro helia $M_{2}^4\text{He}$)

$$E_\alpha = \frac{1}{c^2} \left(M_{Z^A}^X - M_{Z-2}^{A-4}Y - M_{2}^4\text{He} \right). \quad (7.3.17)$$

Rychlost je tedy

$$v_\alpha = \sqrt{\frac{2(E_\alpha + V_0)}{M}}. \quad (7.3.18)$$

takže

$$\tau = \frac{2a}{T} \sqrt{\frac{M}{2(E_\alpha + V_0)}} \quad (7.3.19)$$

a poločas rozpadu je $T_{1/2} = \tau \ln 2$.

4. Výsledky pro zadané izotopy jsou v následující tabulce:

izotop	E_α (MeV)	a (fm)	b (fm)	$\frac{v_\alpha}{c}$	I_a^b	T	$T_{1/2}$ (s)	$T_{1/2}$
${}_{60}^{144}\text{Nd}$	1.8	6.3	96	0.17	120	$7.2 \cdot 10^{-53}$	$2.4 \cdot 10^{30}$	$7.6 \cdot 10^{22}$ let
${}_{88}^{224}\text{Ra}$	5.7	7.3	45	0.17	73	$2.3 \cdot 10^{-32}$	$8.5 \cdot 10^9$	98000 dní
${}_{84}^{212}\text{Po}$	8.8	7.2	28	0.18	43	$3.1 \cdot 10^{-19}$	$5.9 \cdot 10^{-4}$	590 μs

Tento velmi zjednodušený výpočet tedy dává o několik řádů delší poločasy rozpadu, než jsou naměřené hodnoty ze zadání příkladu. Mnohem lepší shody se dosáhne, pokud se uvažuje $a_0 = 1.6$ fm, což v sobě může zahrnout difuzivitu jaderného povrchu.

5. De Broglieovy vlnové délky α částic jsou

$$\lambda_\alpha = \frac{p_\alpha}{\hbar} = \frac{Mv_\alpha}{\hbar}. \quad (7.3.20)$$

Číselně

izotop	λ_α (fm)
${}_{60}^{144}\text{Nd}$	0.32
${}_{88}^{224}\text{Ra}$	0.31
${}_{84}^{212}\text{Po}$	0.30

tedy asi 40 krát menší než je rozměr jádra.

Poznámka:

Pro $a \ll b$ lze aproximovat

$$\arccos \sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{a}{b} - \frac{a^2}{b^2}} \approx \frac{\pi}{2} - \sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\pi}{2} - 2\sqrt{\frac{a}{b}}. \quad (7.3.21)$$

Pak

$$\begin{aligned} \ln \tau &= \ln \frac{2a}{v_\alpha} + 2I_a^b \\ &= \ln \frac{2a_0 \sqrt[3]{A}}{\sqrt{2(E_\alpha + V_0)} M} + \frac{2Z_\alpha Z \gamma}{\hbar} \sqrt{\frac{2M}{E_\alpha}} \left[\frac{\pi}{2} - 2\sqrt{\frac{a_0}{Z_\alpha \gamma}} \sqrt{E_\alpha} A^{\frac{1}{6}} Z^{-\frac{1}{2}} \right] \end{aligned} \quad (7.3.22)$$

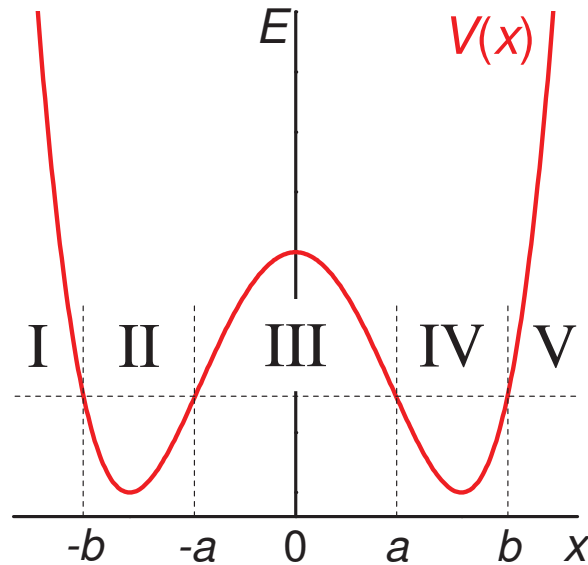
a pro těžká jádra, pro která platí $A \approx 2Z$, dostaneme

$$\ln \tau = \frac{1}{3} \ln Z + \frac{1}{3} \ln 2 + \ln \frac{2a_0}{\sqrt{\frac{2(E_\alpha - V_0)}{M}}} + \frac{2Z_\alpha \gamma \sqrt{2M}}{\hbar} \frac{\pi}{2} \frac{Z}{\sqrt{E}} - 4 \frac{\sqrt{2Z_\alpha \gamma a_0 M}}{\hbar} \sqrt[6]{2} Z^{\frac{2}{3}} \quad (7.3.23)$$

To je v souladu s experimentálně pozorovanou závislostí

$$(\ln \tau)_{\text{exp}} = C_1 \left(\frac{Z}{\sqrt{E_\alpha}} - Z^{\frac{2}{3}} \right) - C_2. \quad (7.3.24)$$

7.4 Dvojitá symetrická jáma



Obrázek 7: Potenciál dvojitě symetrické jámy.

Částice o hmotnosti M se pohybuje v sudém dvoujámovém potenciálu $V(x) = V(-x)$, viz obrázek 7. Kdyby byly obě jámy oddělené nekonečně vysokou bariérou, všechny energetické hladiny by byly dvakrát degenerované a odpovídající vlnové funkce by byly sudé a liché. Důsledkem nenulové pravděpodobnosti tunelování přes bariéru, která je v obrázku označena jako oblast III, však dojde k rozštěpení těchto degenerovaných hladin.

1. Určete vzdálenost ΔE mezi hladinami v dubletu pro obecný symetrický dvoujámový potenciál.
2. Určete tuto vzdálenost pro potenciál ve tvaru

$$V(x) = \frac{g^2}{8} (x^a - x_0^2)^2, \quad (7.4.1)$$

kde x_0 určuje x -ové souřadnice minim, g je konstanta. Předpokládejte, že energie je dostatečně hluboko v jamách, kde lze potenciál $V(x)$ aproximovat potenciálem harmonického oscilátoru.

3. Srovnejte číselně s výsledkem úkolu ze 3. cvičení zimního semestru.

Řešení:

1. Systém rozdělíme na pět oblastí podle obrázku 7. Ve výpočtech budeme používat notaci (7.0.19) a navazovací podmínky (7.0.10)—(7.0.13).

- V oblasti I musí vlnová funkce exponenciálně ubývat pro $x \rightarrow -\infty$, takže musí mít tvar

$$\psi_{\text{I}}(x) = \frac{C}{\sqrt{|p(x)|}} e^{-\frac{1}{\hbar} \int_x^{-b} |p(x')| dx'} = \lambda e^{-I_x^{-b}}. \quad (7.4.2)$$

- Do oblasti II vlnovou funkci navážeme pomocí vztahů (7.0.10)—(7.0.11):

$$\psi_{\text{II}}(x) = 2\lambda \sin \left[I_{-b}^x + \frac{\pi}{4} \right] \quad (7.4.3)$$

Vlnovou funkci budeme nyní upravovat do takové formy, abychom mohli pro navázání do oblasti III použít vztahů (7.0.12)—(7.0.13):

$$\begin{aligned} \psi_{\text{II}}(x) &= 2\lambda \underbrace{\sin \left[I_{-b}^{-a} - I_x^{-a} + \frac{\pi}{4} \right]}_{\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b} \\ &= 2\lambda \left\{ \underbrace{\sin I_{-b}^{-a}}_S \cos \left[-I_x^{-a} + \frac{\pi}{4} \right] + \underbrace{\cos I_{-b}^{-a}}_C \sin \left[-\int_x^{-a} + \frac{\pi}{4} \right] \right\} \quad (7.4.4) \end{aligned}$$

Ještě nám vadí znaménko – před integrály v argumentech sinu a cosinu. Platí

$$\begin{aligned} \cos \left[-I + \frac{\pi}{4} \right] &\stackrel{\text{sudá}}{=} \cos \left[I - \frac{\pi}{4} \right] = \underbrace{\cos \left[I + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} \right]}_{\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b} \\ &= \cos \left[I + \frac{\pi}{4} \right] \underbrace{\cos \left(-\frac{\pi}{2} \right)}_0 - \sin \left[I + \frac{\pi}{4} \right] \underbrace{\sin \left(-\frac{\pi}{2} \right)}_{-1} \\ &= \sin \left[I + \frac{\pi}{4} \right], \quad (7.4.5) \end{aligned}$$

a analogicky

$$\sin \left[-I + \frac{\pi}{4} \right] = \cos \left[I + \frac{\pi}{4} \right]. \quad (7.4.6)$$

Vlnovou funkci v oblasti II lze tedy vyjádřit ve tvaru

$$\psi_{\text{II}}(x) = 2\lambda \left\{ S \sin \left[I_x^{-a} + \frac{\pi}{4} \right] + C \cos \left[I_x^{-a} + \frac{\pi}{4} \right] \right\}. \quad (7.4.7)$$

- Do oblasti III vlnovou funkci navážeme pomocí vztahů (7.0.12)—(7.0.13) a ihned ji upravíme pro navázání do následující oblasti:

$$\begin{aligned}
\psi_{\text{III}}(x) &= \lambda S e^{-I^x_a} + 2\lambda C e^{I^x_a} \\
&= \lambda S \underbrace{e^{-I^x_a}}_E e^{I^x_a} + 2\lambda C e^{I^x_a} e^{-I^x_a} \\
&= \lambda S E e^{I^x_a} + \frac{2\lambda C}{E} e^{-I^x_a}
\end{aligned} \tag{7.4.8}$$

- Pokračujeme do oblasti IV pomocí vztahů (7.0.10)—(7.0.11):

$$\begin{aligned}
\psi_{\text{IV}}(x) &= \lambda S E \cos \left[I^x_a + \frac{\pi}{4} \right] + \frac{4\lambda C}{E} \sin \left[I^x_a + \frac{\pi}{4} \right] \\
&= \lambda S E \cos \left[I^b_a - I^b_x + \frac{\pi}{4} \right] + \frac{4\lambda C}{E} \sin \left[I^b_a - I^b_x + \frac{\pi}{4} \right] \\
&= \lambda S E \left\{ C \sin \left[I^b_x + \frac{\pi}{4} \right] - S \cos \left[I^b_x + \frac{\pi}{4} \right] \right\} \\
&\quad + \frac{4\lambda C}{E} \left\{ S \sin \left[I^b_x + \frac{\pi}{4} \right] + C \cos \left[I^b_x + \frac{\pi}{4} \right] \right\} \\
&= \lambda S C \left(E + \frac{4}{E} \right) \sin \left[I^b_x + \frac{\pi}{4} \right] + \lambda \left(-S^2 E + \frac{4C^2}{E} \right) \cos \left[I^b_x + \frac{\pi}{4} \right].
\end{aligned} \tag{7.4.9}$$

Využili jsme sudosti potenciálu, z níž plyne

$$V(x) = V(-x) \implies p(x) = p(-x) \implies I^-_b = I^b_a. \tag{7.4.10}$$

- Poslední navazování provedeme pomocí vztahů (7.0.12)—(7.0.13):

$$\psi_{\text{V}}(x) = \frac{\lambda S C}{2} \left(E + \frac{4}{E} \right) e^{-I^b_x} + \lambda \underbrace{\left(-S^2 E + \frac{4C^2}{E} \right)}_Z e^{I^b_x} \tag{7.4.11}$$

Abychom dostali normovatelnou funkci, která nediverguje pro $x \rightarrow \infty$, musí být $Z = 0$, tj.

$$\begin{aligned}
\lambda \left(-S^2 E + \frac{4C^2}{E} \right) &= 0 \\
S^2 &= \frac{4C^2}{E^2} \\
\frac{C}{S} &= \pm \frac{1}{2} E
\end{aligned} \tag{7.4.12}$$

a po dosazení za S , C a E dostáváme rovnici

$$\cotg \frac{1}{\hbar} \int_a^b p(x) dx = \pm \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{\hbar} \int_a^b |p(x)| dx}. \tag{7.4.13}$$

Následovat bude několik aproximací. Předně předpokládáme, že prostupnost bariéry III je malá, takže $E \approx 0$ a můžeme psát

$$E \approx \cotg \left[E + \pi \left(n + \frac{1}{2} \right) \right], \tag{7.4.14}$$

kde $n \in \mathbb{N}_0$. To vede k rovnici (kvantovací podmínce)

$$\frac{1}{\hbar} \int_a^b p(x) dx = \pi \left(n + \frac{1}{2} \right) \pm \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{\hbar} \int_a^b |p(x)| dx} \quad (7.4.15)$$

Kdyby nebylo tunelování mezi dvěma jamami, spektrum $E_n^{(0)}$ by na základě Bohr-Sommerfeldova kvantování (7.0.18) bylo dáno rovnicí

$$\int_a^b \sqrt{2M [E_n^{(0)} - V(x)]} dx = \pi \hbar \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad (7.4.16)$$

Ve skutečnosti však dochází k tunelování a spektrum je dáno rovnicí (7.4.15). Označíme

$$E_n = E_n^{(0)} + \epsilon \quad (7.4.17)$$

a rozvineme levou stranu rovnice (7.4.15) okolo $E_n^{(0)}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\hbar} \int_a^b \underbrace{\sqrt{2M [E_n - V(x)]}}_{p(x; E_n)} dx &= \frac{1}{\hbar} \int_a^b p(x; E_n^{(0)}) dx + \frac{\epsilon}{\hbar} \int_a^b \frac{\partial p}{\partial E}(x; E_n^{(0)}) dx + \dots \\ &\approx \pi \left(n + \frac{1}{2} \right) + \underbrace{\frac{\epsilon}{\hbar} 2M \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{2M [E_n^{(0)} - V(x)]}}}_{\int_a^b \frac{dx}{v(x)} = \frac{1}{2} \oint \frac{dx}{v(x)} = \frac{T}{2}}, \end{aligned} \quad (7.4.18)$$

kde T je perioda klasické trajektorie na energii $E_n^{(0)}$ (úhlová frekvence je $\Omega = 2\pi/T$). Dosadíme-li nyní do (7.4.15), dostaneme

$$\epsilon = \pm \frac{\hbar \Omega}{2\pi} E \quad (7.4.19)$$

a rozštěpení hladin je

$$\boxed{\Delta E_n = \frac{\hbar \Omega}{\pi} e^{-\frac{1}{\hbar} \int_a^b |p(x)| dx}}. \quad (7.4.20)$$

2. Využijeme předpoklad, že částice se nachází na energii dostatečně blízko dnu jámy a potenciál (7.4.1) rozvineme okolo x_0 :

$$\begin{aligned} V(x) &= \frac{g^2}{8} (x + x_0)^2 \underbrace{(x - x_0)^2}_y = \frac{g^2}{8} (y + 2x_0)^2 y^2 \\ &\approx \frac{1}{2} g^2 x_0^2 y^2 = \frac{1}{2} M \Omega^2 y^2, \end{aligned} \quad (7.4.21)$$

takže pohyb hluboko v jámě lze aproximovat periodickým pohybem harmonického oscilátoru s frekvencí

$$\Omega = \frac{gx_0}{\sqrt{M}} \quad (7.4.22)$$

a spektrem

$$E_n = \hbar \Omega \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad (7.4.23)$$

Body obratu (řešení rovnice $V(x) = E_n$) pak jsou

$$\frac{a}{b} = x_0 \mp \sqrt{\frac{\hbar}{M\Omega} \left(n + \frac{1}{2} \right)} \quad (7.4.24)$$

a speciálně pro základní stav $n = 0$

$$a = x_0 - \sqrt{\frac{\hbar}{M\Omega}} \quad b = x_0 + \sqrt{\frac{\hbar}{M\Omega}}. \quad (7.4.25)$$

Spočtěme integrál

$$\begin{aligned} \hbar I_{-a}^a &= 2\hbar I_0^a = 2 \int_0^a \sqrt{2M \left[\frac{g^2}{8} (x_0^2 - x^2)^2 - \frac{1}{2} \hbar \Omega \right]} dx \\ &= \int_0^a \underbrace{g}_{\frac{\Omega}{x_0} \sqrt{M}} \sqrt{M} (x_0^2 - x^2) \sqrt{1 - \frac{4\hbar\Omega}{g^2 (x_0^2 - x^2)^2}} dx \\ &\approx \int_0^a \frac{M\Omega (x_0^2 - x^2)}{x_0} dx - 2 \int_0^a \frac{\hbar x_0}{x_0^2 - x^2} dx \\ &= \int_0^a \left[M\Omega x_0^2 - \frac{M\Omega x^2}{x_0} - \frac{\hbar}{x_0 - x} - \frac{\hbar}{x_0 + x} \right] dx \\ &= \left[M\Omega x_0^2 x - \frac{M\Omega x^3}{3x_0} + \hbar \ln(x_0 - x) - \hbar \ln(x_0 + x) \right]_0^a \\ &= M\Omega x_0 \left(x_0 - \sqrt{\frac{\hbar}{M\Omega}} \right) - \underbrace{\frac{M\Omega}{3x_0} \left(x_0 - \sqrt{\frac{\hbar}{M\Omega}} \right)^3}_{\approx \frac{M\Omega x_0^2}{3} \left(1 - \frac{3}{x_0} \sqrt{\frac{\hbar}{M\Omega}} + \frac{3}{x_0^2} \frac{\hbar}{M\Omega} \right)} + \underbrace{\hbar \ln \sqrt{\frac{\hbar}{M\Omega}}}_{\hbar \ln x_0 + \hbar \ln \frac{1}{x_0} \sqrt{\frac{\hbar}{M\Omega}}} \\ &\quad - \underbrace{\hbar \ln \left(2x_0 - \sqrt{\frac{\hbar}{M\Omega}} \right)}_{\hbar \ln x_0 + \hbar \ln \left(2 - \frac{1}{x_0} \sqrt{\frac{\hbar}{M\Omega}} \right)} \\ &\approx \frac{2M\Omega x_0^2}{3} - \hbar + \hbar \ln \sqrt{\frac{\hbar}{4M\Omega x_0^2}} + \mathcal{O} \left(\hbar^{\frac{2}{3}} \right), \end{aligned} \quad (7.4.26)$$

kde jsme předpokládali, že Planckova konstanta \hbar je malý parametr.

Nyní dosadíme do (7.4.20) a dostaneme

$$\Delta E_0 = \frac{\Omega \hbar}{\pi} e^{-I_{-a}^a} \approx \frac{\Omega \hbar}{\pi} \sqrt{\frac{4M\Omega x_0^2}{\hbar}} e^{-\frac{2M\Omega x_0^2}{3\hbar} + 1} = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{\hbar g^3 x_0^5}{\sqrt{M}}} e^{-\frac{2\sqrt{M} g x_0^3}{3\hbar} + 1}. \quad (7.4.27)$$

Sbírka [12] uvádí výsledek odlišně

$$\Delta E'_0 = 2 \sqrt{\frac{\hbar g^3 x_0^5}{M}} e^{-\frac{2\sqrt{M} g x_0^3}{3\hbar}}, \quad (7.4.28)$$

a to i přesto, že integrál I_{-a}^a v ní vychází stejně jako zde. Tento výraz $\Delta E'_0$ nicméně lépe souhlasí s přesnějšími metodami, viz např. následující bod.

3. Potenciál, se kterým srovnáváme, je

$$V(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^4 = \frac{1}{2} \left(x^2 - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{2}, \quad (7.4.29)$$

takže se jedná o potenciál (7.4.1) s

$$g = 2, \quad x_0 = \sqrt{\frac{1}{8}} \quad (7.4.30)$$

a spektrum je posunuté o $\frac{1}{8}$ dolů.

Pro dostatečně malé hodnoty \hbar (v úloze se mělo počítat s $\hbar = 0.03$) dostaneme pro základní stav

$$\begin{aligned} \Omega &= \frac{gx_0}{\sqrt{M}} = \sqrt{2} \approx 1.4142 \\ E_0 &= \frac{1}{2}\hbar\Omega - \frac{1}{8} \approx -0.1038 \\ \Delta E'_0 &= 6.2 \cdot 10^{-8} \end{aligned} \quad (7.4.31)$$

Naproti tomu na základě numerické diagonalizace jsme dostali

$$E_0 = -0.1043 \quad \Delta E = 6.5 \cdot 10^{-8}. \quad (7.4.32)$$

Pro menší hodnoty \hbar bychom dostali lepší shodu.