

Cvičení 8

WKB aproximace

Domácí úkol – Coulombické pole ve WKB aproximaci (*termín odevzdání: 11.4.2018*)

WKB metodu lze aplikovat také na problémy se sféricky symetrickým polem. Schrödingerova rovnice pro radiální část vlnové funkce $R(r)$ obecného sféricky symetrického problému má tvar

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d}{dr} R(r) + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V_{\text{ef}}(r)) R(r) = 0,$$

kde

$$V_{\text{ef}}(r) \equiv V(r) + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2}$$

je efektivní potenciál, zahrnující v sobě centrifugální člen. Zavedením substituce $R(r) = u(r)/r$ dostaneme rovnici

$$\frac{d^2}{dr^2} u(r) + k^2(r) u(r) = 0,$$

kde $k^2(r) = 2m/\hbar^2 (E - V_{\text{ef}})$.

WKB metoda pro sféricky symetrické potenciály dává dobré výsledky jedině v případě, aplikujeme-li tzv. *Langerovu korekci*, která spočívá v nahrazení

$$l(l+1) \rightarrow \left(l + \frac{1}{2}\right)^2$$

(dá se odvodit z asymptotiky vlnových funkcí, původní práci Rudolpha E. Langerova lze nalézt v Phys. Rev. **51**, 669 (1937)). Vázané stavy lze pak nalézt z rovnice ekvivalentní Bohr-Sommerfeldově kvantovací podmínce

$$\int_{r_1}^{r_2} k'(r) dr = \left(n_r + \frac{1}{2}\right) \pi,$$

přičemž $k'(r)$ zahrnuje Langerovu korekci, $n_r = 0, 1, \dots$ je radiální kvantové číslo, $r_{1,2}$ jsou body obratu klasické trajektorie s hybností $p'(r) = \hbar k'(r)$.

Uvažujte konkrétní případ pohybu částice v Coulombickém poli

$$V(r) = -\frac{\gamma}{r}.$$

kde $\gamma = e^2/(4\pi\epsilon_0)$.

1. Nalezněte body obratu $r_{1,2}$ trajektorie s energií E (počítejte s Langerovou korekcí).
2. Pomocí WKB přiblížení nalezněte spektrum, tj. stavy s energií $E < 0$.
3. Porovnejte toto spektrum se spektrem získaným přesným řešením Schrödingerovy rovnice.