1 Teoretický úvod

1.1 Sférické Besselovy funkce

Sférické Besselovy funkce jsou dvě lineárně nezávislá řešení *Helmholtzovy* diferenciální rovnice:

$$-\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}+\frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}-\frac{l(l+1)}{r^2}\right]\begin{matrix} j_l(r) \\ n_l(r)\end{matrix} = \begin{matrix} j_l(r) \\ n_l(r),\end{matrix}$$

$j_l(r)$ nazýváme *sférickou Besselovou funkcí*, $n_l(r)$ nazýváme *sférickou Neumannovou funkcí*.

Dále definujeme *sférické Hankelovy funkce* předpisem: $\boxed{h_l^{\pm}(r) := j_l(r) \pm i n_l(r)}$

Pro *sférické Besselovy funkce* a *sférické Hankolovy funkce* platí následující asymptotiky:

$$j_l(r) \xrightarrow{r\to\infty} \frac{\sin\left(r - l\frac{\pi}{2}\right)}{r} \qquad n_l(r) \xrightarrow{r\to\infty} -\frac{\cos\left(r - l\frac{\pi}{2}\right)}{r}$$

$$h_j^+(r) \xrightarrow{r\to\infty} \frac{\exp\left[i(r-(l+1)\frac{\pi}{2}\right]}{r} \qquad h_j^-(r) \xrightarrow{r\to\infty} \frac{\exp\left[-i(r-(l+1)\frac{\pi}{2}\right]}{r}$$

$$j_l(r) \xrightarrow{r\to 0^+} \frac{r^l}{(2l+1)!!} \qquad n_l(r) \xrightarrow{r\to 0^+} \begin{cases} -\frac{1}{r} & \text{pro } l=0 \\ \frac{(2l-1)!!}{r^{l+1}} & \text{pro } l>0 \end{cases}$$

Dále pro *sférické Besselovy funkce* platí relace ortogonality a rozklad exponenciály:

$$\int_0^\infty j_l(kr) j_l(k'r) r^2 \,\mathrm{d}r = \frac{\pi}{2k^2}\delta(k-k')$$

$$e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} = \sum_{l=0}^{\infty} i^l(2l+1) j_l(kr)\mathsf{P}_l(\cos\vartheta),$$

kde osa soustavy z je orientována rovnoběžně s vektorem $\boldsymbol{k}$, tj. $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} = kr\cos\vartheta$.

1.2 Stacionární stavy volné částice ve sférické reprezentaci

Vlnová funkce volné částice s velikostí vlnového vektoru k je řešením stacionární Schrödingerovy rovnice

$$-\frac{\hbar^2}{2M}\Delta\psi_{klm}(r,\vartheta,\varphi) = E_k\psi_{klm}(r,\vartheta,\varphi),$$

kde pro energii platí vztah $E_k = \hbar^2 k^2/2M$.

K řešení rovnice využijeme vyjádření Laplaceova operátoru ve sférických souřadnicích a vyjádření operátoru momentu hybnosti také ve sférických souřadnicích:

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta} + +\frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

$$\hat{\boldsymbol{L}} = \hat{\boldsymbol{r}} \times \hat{\boldsymbol{p}} = -i\hbar\hat{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{\nabla} = -i\hbar r\boldsymbol{e}_r \times \left[\boldsymbol{e}_r\frac{\partial}{\partial r} + \boldsymbol{e}_\vartheta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\vartheta} + \boldsymbol{e}_\varphi\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right]$$

$$= -i\hbar\left[\boldsymbol{e}_\varphi\frac{\partial}{\partial\vartheta} - \boldsymbol{e}_\vartheta\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right]$$

$$\hat{L}^2 = -\hbar^2\left[\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta} + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]$$

Hledanou vlnovou funkci můžeme hledat v multiplikativním separabilním tvaru:

$$\psi_{klm}(r,\vartheta,\varphi) = \mathsf{R}_{kl}(r)\mathsf{Y}_{lm}(\vartheta,\varphi),$$

kde kulové funkce $\mathsf{Y}_{lm}(\vartheta,\varphi)$ jsou vlastní funkce operátoru kvadrátu celkového momentu hybnosti $\hat{L}^2$:

$$\hat{L}^2\mathsf{Y}_{lm}(\vartheta,\varphi) = \hbar^2 l(l+1)\mathsf{Y}_{lm}(\vartheta,\varphi)$$

S využitím dříve odvozených vztahů tak můžeme psát rovnici pro radiální část vlnové funkce:

$$-\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} + \frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} - \frac{l(l+1)}{r^2}\right]\mathsf{R}_{kl}(r) = k^2\mathsf{R}_{kl}(r)$$

Přechodem $r \to kr$ pak získáme přímo *Helmholtzovu* diferenciální rovnici, jejíž řešení je diskutované v sekci 1.1.

1.3 Metoda parciálních vln pro elastický rozptyl

Pro použití metody rozkladu do parciálních vln je nutné, aby byl rozptylový potenciál sféricky symetrický, tj. $V(\boldsymbol{r}) = V(r)$. Rozptýlená vlnová funkce ψ_k se asymptoticky blíží k superpozici rovinné vlny s velikostí vlnového vektoru k, přičemž uvažujeme $\boldsymbol{k} = k\boldsymbol{e}_z$, a rozptýlené odcházející kulové vlny:

$$\psi_k(\boldsymbol{r}) \xrightarrow{r\to\infty} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\left[e^{ikz} + f_k(\vartheta)\frac{e^{ikr}}{r}\right],$$

kde závislost amplitud rozptylu $f_k(\vartheta)$ na úhlu φ vypadne díky sférické symetrii potenciálu $V(r)$ (jediný význačný směr problému je směr příchodu rovinné vlny, tj. osa z).

Pomocí vztahu pro rozklad exponenciály (viz 1.1) a obecného vztahu pro rozklad libovolné funkce závisející na ϑ:

$$f_k(\vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)F_l(k)\mathsf{P}_l(\cos\vartheta),$$

kde $F_l(k)$ nazýváme amplituda l-té parciální vlny a $\mathsf{P}_l(\cos\vartheta)$ jsou *Legendreovy polynomy*, celkově tak získáváme asymptotiku rozptýlené vlnové funkce ve tvaru:

$$\psi_k(\boldsymbol{r}) \xrightarrow{r\to\infty} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\mathsf{P}_l(\cos\vartheta)\frac{1}{2ik}\left[(1+2ikF_l(k))\frac{e^{ikr}}{r} - \frac{e^{-i(kr-l\pi)}}{r}\right]$$

Jelikož uvažujeme pouze elastický rozptyl, musí platit rovnice kontinuity, tj. příchozí a odchozí tok se musí rovnat, a tedy se koeficienty před odchozí a příchozí sférickou vlnou musí lišit pouze ve fázi:

$$S_l(k) \coloneqq 1 + 2ikF_l(k) = e^{2i\delta_l(k)},$$

kde $S_l(k)$ značí diagonální prvek *S-matice* $\langle +kl0 \,|\, \hat{S} \,|\, +kl0\rangle$ v bázi $|klm\rangle$. Nově tedy parametrizujeme amplitudy l-té parciální vlny pomocí relativního fázového posunu $\delta_l(k)$, pomocí kterého lze vyjádřit amplitudu rozptylu:

$$f_k(\vartheta) = \frac{1}{k}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)e^{i\delta_l(k)}\sin\delta_l(k)\mathsf{P}_l(\cos\vartheta)$$

Pomocí ortogonality *Legendreových polynomů*

$$\int_0^{\pi}\mathsf{P}_l(\cos\vartheta)\mathsf{P}_{l'}(\cos\vartheta)\sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta = \frac{2}{2l+1}\delta_{ll'}$$

můžeme získat vztah pro elastický integrální rozptyl l-té parciální vlny, a tedy i pro celkový elastický integrální rozptyl:

$$\begin{aligned}\sigma_l^{\mathrm{el}}(k) &= \frac{1}{k^2}(2l+1)(2l'+1)F_l(k)F_{l'}^*(k)\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\mathsf{P}_l(\cos\vartheta)\mathsf{P}_{l'}(\cos\vartheta)\sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi\\ &= \frac{4\pi}{k^2}(2l+1)|F_l(k)|^2 = \frac{4\pi}{k^2}(2l+1)\sin^2\delta_l(k)\end{aligned}$$

$$\sigma^{\mathrm{el}}(k) = \sum_{l=0}^{\infty}\sigma_l^{\mathrm{el}}(k) = \frac{4\pi}{k^2}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\sin^2\delta_l(k)$$

1.4 Fázová analýza

Pro potenciál s konečným dosahem, tj. $V(r > R) \approx 0$, má řešení pro radiální část vlnové funkce mimo dosah potenciálu (tedy pro $r \geq R$) tvar (viz 1.2):

$$\mathsf{R}_{kl}(r \geq R) = a_l j_l(kr) + b_l n_l(kr) = c_l^+ h_l^+(kr) + c_l^- h^-(kr)$$

Obecné řešení pro $r \geq R$ má tedy tvar:

$$\psi_k(r, \vartheta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \alpha_{lm} \mathsf{R}_{kl}(r) \mathsf{Y}_{lm}(\vartheta, \varphi)$$

Z požadavku $V(r) \equiv 0 \implies \psi_{kl}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{ikz}$ získáme vztah pro koeficienty α_{kl}:

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \alpha_{lm} j_l(kr) \mathsf{Y}_{lm}(\vartheta, \varphi) \stackrel{!}{=} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{ikz} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2)}} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l j_l(kr) \mathsf{P}_l(\cos\vartheta)$$

$$\implies \alpha_{lm} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} (2l+1) i^l \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \delta_{m0},$$

kde jsme využili $\mathsf{P}_l(\cos\vartheta) = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \mathsf{Y}_{l,m=0}(\vartheta, \varphi)$. S využitím vztahů pro *sférické Hankelovy funkce* (viz 1.1) získáme $c_l^\pm$ porovnáním koeficientů pro požadovanou asymptotiku (viz 1.3):

$$\begin{aligned}
\psi_{kl}(r, \vartheta, \varphi) &\xrightarrow{r\to\infty} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \mathsf{P}_l(\cos\vartheta) \frac{1}{ik} \left[c_l^+ \frac{e^{ikr}}{r} - c_l^- \frac{e^{-i(kr - l\pi)}}{r} \right] \\
&\xrightarrow{r\to\infty} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \mathsf{P}_l(\cos\vartheta) \frac{1}{2ik} \left[e^{2i\delta_l(k)} \frac{e^{ikr}}{r} - \frac{e^{-i(kr - l\pi)}}{r} \right],
\end{aligned}$$

z čehož přímo vidíme, že $c_l^+ = \frac{1}{2} e^{2i\delta_l(k)}$ a $c_l^- = \frac{1}{2}$. Zpětným přepisem do *sférických Besselových funkcí* s využitím goniometrických vzorců můžeme pro radiální část l-té parciální vlny psát:

$$\begin{aligned}
\mathsf{R}_{kl}(r) &= \frac{1}{2} e^{2i\delta_l(k)} \left[j_l(kr) + i n_l(kr) \right] + \frac{1}{2} \left[j_l(kr) - i n_l(kr) \right] \\
&= e^{i\delta_l(k)} \left[\cos\delta_l(k) j_l(kr) - \sin\delta_l(k) n_l(kr) \right] \\
&\xrightarrow{r\to\infty} \frac{e^{i\delta_l(k)}}{kr} \left[\cos\delta_l(k) \sin(kr - l\tfrac{\pi}{2}) + \sin\delta_l(k) \cos(kr - l\tfrac{\pi}{2}) \right] \\
&= \frac{e^{i\delta_l(k)}}{kr} \sin(kr - l\tfrac{\pi}{2} + \delta_l(k))
\end{aligned}$$

Přítomnost netriviálního potenciálu $V(r)$ tak způsobí fázové posunutí rozptýlené vlny oproti případu volné částice dané veličinou $\delta_l(k)$. Zjevně také vidíme, že pro $\delta_l(k) \to 0$ vymizí z řešení *sférické Neumannovy funkce*.

Pokud má potenciál $V(r)$ ostrou hranici, tedy platí:

$$V(r) \begin{cases} \neq 0 & \text{pro } r \leq R \\ = 0 & \text{pro } r > R, \end{cases}$$

můžeme fázové posunutí $\delta_l(k)$ určit zavedením logaritmické derivace:

$$\beta_{kl}(R) \coloneqq R \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} \log \mathsf{R}_{kl}(r)\big|_{r=R} = R \left. \frac{\mathsf{R}'_{kl}(r)}{\mathsf{R}_{kl}(r)} \right|_{r=R}$$

Pro vnější logaritmickou derivaci tak máme:

$$\beta_{kl}(R^+) = kR \frac{\cos\delta_l(k) j'_l(kR) - \sin\delta_l(k) n'_l(kR)}{\cos\delta_l(k) j_l(kR) - \sin\delta_l(k) n_l(kR)}$$

pokud navíc známe vnitřní řešení, a tedy i vnitřní logaritmickou derivaci $\beta_{kl}(R^-)$, platí pro fázový posun:

$$\tan\delta_l(k) = \frac{kRj'_l(kR) - \beta_{kl}(R^-) j_l(kR)}{kRn'_l(kR) - \beta_{kl}(R^-) n_l(kR)}$$

2 Wronskián sférické Besselovy funkce (příklad 13.2)

2.1 Zadání

Nalezněte, čemu se rovná Wronskián sférických Besselových funkcí, tj. determinant

$$W_l(z) := \det \begin{pmatrix} j_l(z) & n_l(z) \\ j_l'(z) & n_l'(z) \end{pmatrix} = j_l(z)n_l'(z) - j_l'(z)n_l(z)$$

2.2 Řešení

Pro řešení vynásobíme diferenciální rovnici pro $j_l(z)$ zleva $n_l(z)$ a rovnici pro $n_l(z)$ zleva $j_l(z)$, následně od sebe rovnice odečteme:

$$-n_l(z)\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2} + \frac{2}{z}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} - \frac{l(l+1)}{z^2}\right] j_l(z) = n_l(z)j_l(z)$$
$$-j_l(z)\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2} + \frac{2}{z}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} - \frac{l(l+1)}{z^2}\right] n_l(z) = j_l(z)m_l(z)$$

$$j_l(z)n_l''(z) - j_l''(z)n_l(z) + \frac{2}{z}\left[j_l(z)n_l'(z) - j_l'(z)n_l(z)\right] = 0$$
$$W_l'(z) + \frac{2}{z}W_l(z) = 0,$$

řešením této rovnice (např. separací proměnných) je funkce $W(z) = \frac{K}{z^2}$. Konstantu K lze určit například pomocí asymptotiky $z \to \infty$:

$$\begin{aligned} W(z\to\infty) &\approx \frac{\sin\left(z - l\frac{\pi}{2}\right)}{z}\left(-\frac{\cos\left(z - l\frac{\pi}{2}\right)}{z}\right)' + \left(\frac{\sin\left(z - l\frac{\pi}{2}\right)}{z}\right)'\frac{\cos\left(z - l\frac{\pi}{2}\right)}{z} \\ &= \frac{\sin^2\left(z - l\frac{\pi}{2}\right)}{z^2} + \frac{\sin\left(z - l\frac{\pi}{2}\right)}{z}\frac{\cos\left(z - l\frac{\pi}{2}\right)}{z^2} + \frac{\cos^2\left(z - l\frac{\pi}{2}\right)}{z^2} - \frac{\sin\left(z - l\frac{\pi}{2}\right)}{z}\frac{\cos\left(z - l\frac{\pi}{2}\right)}{z^2} \\ &= \frac{1}{z^2}, \end{aligned}$$

pro konstantu K tedy musí platit $K = 1$ a celkově získáváme:

$$\boxed{\mathrm{W}_l(z) = \tfrac{1}{z^2}}$$

3 Sférická dutina obalená δ-slupkou (příklad 13.3)

3.1 Zadání

Částice se rozptyluje na potenciálu

$$V(r) = \frac{v}{a}\delta(r-a),$$

tj. jde o dutinu obalenou nekonečně tenkou slupkou z δ-funkce.

$\boxed{1.}$ Nalezněte radiální část vlnové funkce $\mathsf{R}_{kl}(r)$.

$\boxed{2.}$ Určete fázové posunutí l-té parciální vlny $\delta_l(k)$.

$\boxed{3.}$ Určete totální účinný průřez l-té parciální vlny $\sigma_l(k)$

3.2 Řešení

$\boxed{1.}$ Jelikož je zadaný potenciál zřejmě sféricky symetrický, můžeme použít metodu řešení pomocí rozvoje do parciálních vln. Mimo oblast sféry o poloměru a centrované v počátku je vlnová funkce částice daná řešením rovnice pro pohyb volné částice. Při vyjádření vlnové funkce ve sférických souřadnicích bude její radiální část dána lineární kombinací sférických Besselových a Neumannových funkcí.

Uvnitř sféry bude řešení dáno pouze sférickými Besselovými funkcemi, jelikož Neumannovy funkce v počátku divergují, tj.:

$$\mathsf{R}_{kl}(r) = A_l(k) j_l(kr) \qquad \text{pro } r < a$$

Mimo oblast sféry lze řešení napsat v obecném tvaru:

$$\mathsf{R}_{kl}(r) = B_l(k)\left[\alpha_j(k) j_l(kr) + \beta_j(k) n_l(kr)\right] \qquad \text{pro } r > a$$

Pro zcela volnou částici (tj. bez potenciálu $V(r)$) má (opět kvůli divergenci Neumannových funkcí v počátku) radiální část vlnové funkce obecný tvar:

$$\mathsf{R}^{(0)}_{kl}(r) = \gamma_l(k) j_l(kr) \quad \text{s asymptotikou} \quad \mathsf{R}^{(0)}_{kl} \propto \frac{\sin\left(kr - l\frac{\pi}{2}\right)}{kr} \text{ pro } r\to\infty$$

Potenciál daný δ-funkcí tak způsobí fázové posunutí $\delta_l(k)$ oproti případu zcela volné částice:

$$\mathsf{R}_{kl}(r\to\infty) \propto \frac{\sin(kr - l\frac{\pi}{2} + \delta_l(k))}{kr} = \cos\delta_l(k)\frac{\sin\left(kr - l\frac{\pi}{2}\right)}{kr} + \sin\delta_l(k)\frac{\cos\left(kr - l\frac{\pi}{2}\right)}{kr}$$

Jelikož pro obecné řešení v asymptotickém tvaru platí:

$$\mathsf{R}_{kl}(r) \xrightarrow{r\to\infty} B_l(k)\left[\alpha_j(k)\frac{\sin\left(kr - l\frac{\pi}{2}\right)}{kr} - \beta_j(k)\frac{\cos\left(kr - l\frac{\pi}{2}\right)}{kr}\right],$$

můžeme do obecného tvaru řešení pro radiální část vlnové funkce dosadit fázové posunutí a získáme tak celkový vztah:

$$\boxed{\mathsf{R}_{kl}(r) = \begin{cases} A_l(k)j_l(kr) & \text{pro } r < a \\ B_l(k)\left[\cos\delta_l(k)j_l(kr) - \sin\delta_l(k)n_l(kr)\right] & \text{pro } r > a \end{cases}}$$

$\boxed{2.}$ Po radiální části vlnové funkce pro $r = a$ požadujeme její spojitost a skok v první derivaci (podle r) daný "silou" δ-funkce v potenciálu:

$$\mathsf{R}_{kl}(a^+) - \mathsf{R}_{kl}(a^-) = 0$$
$$\mathsf{R}'_{kl}(a^+) - \mathsf{R}'_{kl}(a^-) = \frac{2Mv}{\hbar^2 a}\mathsf{R}_{kl}(a)$$

Máme tedy dvojici rovnic, kde jsem označili $Q \coloneqq 2Mv/\hbar^2$:

$$B_l(k)\left[\cos\delta_l(k)j_l(ka) - \sin\delta_l(k)n_l(ka)\right] - A_l(k)j_l(ka) = 0$$
$$kB_l(k)\left[\cos\delta_l(k)j'_l(ka) - \sin\delta_l(k)n'_l(ka)\right] - kA_l(k)j'_l(ka) = \frac{Q}{a}A_l(k)j_l(ka)$$

Dosazením první rovnice do druhé a následnou úpravou (podělení $B_l(k)$, vynásobení $j_l(k)$) získáme:

$$\left[j_l(ka)n'_l(ka) - j'_l(ka)n_l(ka)\right]\sin\delta_l(k) = -\frac{Q}{ak}j_l(ka)\left[j_l(ka)\sin\delta_l(k) - n_l(ka)\cos\delta_l(k)\right],$$

kde v levé části rovnice rozpoznáme vztah pro Wronskián sférických Besselových funkcí, pro který využijeme vztah z 2.2 $W(z) = z^{-2}$ a po úpravě dostaneme vztah:

$$\boxed{\tan\delta_l(k) = \tfrac{Qj_l^2(ka)}{Qj_l(ka)n_l(ka) - \frac{1}{ak}}}$$

Z podmínky na spojitost vlnové funkce můžeme navíc získat *koeficient průniku*:

$$P_l(k) \coloneqq \left|\frac{A_l(k)}{B_l(k)}\right|^2 = \frac{\cos\delta_l(k)j_l(ka) - \sin\delta_l(k)n_l(ka)}{j_l(ka)}$$

$\boxed{3.}$ Pro získání integrálního účinného průřezu l-té parciální vlny využijeme vztah odvozený v 1.3 společně s goniometrickou identitou:

$$\sin^2 x = \frac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x} \implies \sin^2 \delta_l(k) = \frac{Q^2 j_l^4(ka)}{\left[Q j_l(ka) n_l(ka) - \frac{1}{ak}\right]^2 + Q^2 j_l^4(ka)},$$

celkově tedy máme:

$$\boxed{\sigma_l^{\mathrm{el}}(k) = \tfrac{4\pi}{k^2}(2l+1)\tfrac{Q^2 j_l^4(ka)}{\left[Q j_l(ka) n_l(ka) - \frac{1}{ak}\right]^2 + Q^2 j_l^4(ka)}}$$

A Důležité vztahy

Sférické Besselovy funkce

$\boxed{h_l^{\pm}(r) \coloneqq j_l(r) \pm i n_l(r)}$	Definice *Hankelových funkcí*
$\boxed{\begin{aligned} j_l(r) &\approx \frac{\sin(r - l\frac{\pi}{2})}{r} \\ n_l(r) &\approx -\frac{\cos(r - l\frac{\pi}{2})}{r} \end{aligned}}$	Asymptotika *sférických Besselových funkcí* pro $r \to \infty$
$\boxed{\begin{aligned} j_l(r) &\approx \frac{r^l}{(2l+1)!!} \\ n_l(r) &\approx \frac{(2l-1)!!}{r^{l+1}} \end{aligned}}$	Asymptotika *sférických Besselových funkcí* pro $r \to 0^+$, kde definujeme $(-1)!! \coloneqq -1$
$\boxed{\begin{aligned} h_j^+(r) &\approx \frac{\exp\left[i(r-(l+1)\frac{\pi}{2}\right]}{r} \\ h_j^-(r) &\approx \frac{\exp\left[-i(r-(l+1)\frac{\pi}{2}\right]}{r} \end{aligned}}$	Asymptotika *sférických Hankelových funkcí* pro $r \to \infty$

Metoda parciálních vln pro el. rozptyl

$\boxed{S_l(k) \coloneqq 1 + 2ikF_l(k) = e^{2i\delta_l(k)}}$	Parametrizace fázovým posunem $\delta_l(k)$
$\boxed{\sigma_l^{\text{el}}(k) = \frac{4\pi}{k^2}(2l+1)\sin^2\delta_l(k)}$	Integrální účinný průřez l-té parciální vlny
$\boxed{\sigma^{\text{el}}(k) = \sum_{l=0}^{\infty} \sigma_l^{\text{el}}(k)}$	Integrální účinný průřez

Fázová analýza

$\boxed{\mathsf{R}_{kl}(r) \approx \frac{e^{i\delta_l(k)}}{kr} \sin\left(kr - l\frac{\pi}{2} + \delta_l(k)\right)}$	Asymptotika $\mathsf{R}_{kl}(r)$ pro $r \to \infty$
$\boxed{\tan\delta_l(k) = \frac{kRj_l'(kR) - \beta_{kl}(R^-)j_l(kR)}{kRn_l'(kR) - \beta_{kl}(R^-)n_l(kR)}}$	Fázový posun z vnitřní log. derivace $\beta_{kl}(R^-)$

B Explicitní vyjádření sférických funkcí

Sférické Besselovy funkce	**Sférické Neumanovy funkce**
$j_0(r) = \frac{\sin r}{r}$	$n_0(r) = -\frac{\cos r}{r}$
$j_1(r) = \frac{\sin r}{r^2} - \frac{\cos r}{r}$	$n_1(r) = -\frac{\cos r}{r^2} - \frac{\sin r}{r}$
$j_2(r) = \frac{3\sin r}{r^3} - \frac{3\cos r}{r^2} - \frac{\sin r}{r}$	$n_2(r) = -\frac{3\cos r}{r^3} - \frac{3\sin r}{r^2} + \frac{\cos r}{r}$
$j_3(r) = \frac{15\sin r}{r^4} - \frac{15\cos r}{r^3} - \frac{6\sin r}{r^2} + \frac{\cos r}{r}$	$n_3(r) = -\frac{15\cos r}{r^4} - \frac{15\sin r}{r^3} + \frac{6\cos r}{r^2} + \frac{\sin r}{r}$

Sférické Hankelovy funkce 1. druhu	**Sférické Hankelovy funkce 2. druhu**
$h_0^+(r) = -\frac{ie^{ir}}{r}$	$h_0^-(r) = \frac{ie^{-ir}}{r}$
$h_1^+(r) = -\frac{ie^{ir}}{r^2} - \frac{e^{ir}}{r}$	$h_1^-(r) = \frac{ie^{-ir}}{r^2} - \frac{e^{-ir}}{r}$
$h_2^+(r) = -\frac{3ie^{ir}}{r^3} - \frac{3e^{ir}}{r^2} + \frac{ie^{ir}}{r}$	$h_2^-(r) = \frac{3ie^{-ir}}{r^3} - \frac{3e^{-ir}}{r^2} - \frac{ie^{-ir}}{r}$
$h_3^+(r) = -\frac{15ie^{ir}}{r^4} - \frac{15e^{ir}}{r^3} + \frac{6ie^{ir}}{r^2} + \frac{e^{ir}}{r}$	$h_3^-(r) = \frac{15ie^{-ir}}{r^4} - \frac{15e^{-ir}}{r^3} - \frac{6ie^{-ir}}{r^2} + \frac{e^{-ir}}{r}$