

STUDENTSKÝ FAKULTNÍ GRANT

Analýza koreláci jaderných hmotností

Student: Samuel Mičo

Vedoucí grantu: Mgr. Pavel Stránský, Ph.D.

November 2020

1 Súčasný stav

Presné merania hmotností atómových jadier sú jednou z kľúčových veličín pre jadrovú fyziku, a hlavne pre jadrovú astrofyziku. Bez nich nie je možné porozumieť jadrovým procesom vnútri hviezd a rozdeleniu relatívnych množstiev izotopov vo vesmíre. Hmotnosti viacej než 2000 známych jadier boli naposledy súhrnne publikované v "The 2016 Atomic Mass Evaluation"[1,2]. Dáta tejto tabuľky sú taktiež dostupné online [3].

2 Ciele SFG

Riešiteľ projektu sa zoznámi s uvedeným kompilátom jadrových hmotností. Pomocou publikovaných dát určí parametry najčastejšie používaného fenomenologického modelu jadrových hmotností, tzv. Bethe-Weizsäckerovej hmotnostnej formuly, a analyzuje odchýlky teoretických predpovedí od nameraných hodnôt. Overí taktiež platnosť a presnosť Garvey-Kelsonových relácií [4,5], ktoré vyjadrujú korelácie medzi hmotnosťami susedných jadier v jadrovej tabuľke.

3 Teoretická časť

3.1 Kvapkový model jadra

V jadrovej fyzike je kvapkový model jadra popisom atómového jadra, v ktorom sa nukleóny správajú ako molekuly v kvapke tekutiny [6]. Tento model sformuloval americký (narodený v Rusku) fyzik George Gamow v roku 1929. Aj keď nie je tento model schopný predpovedať všetky pozorovania jadrovej fyziky, teória, na ktorej je model založený, poskytuje skvelé priblíženia priemerných vlastností jadra. Tento model bol napríklad v roku 1938 použitý rakúskymi fyzikmi Lise Meitnerovou a Ottom Frischom k vysvetleniu jadrového štiepenia.

Tento jadrový model hovorí o sférickom tvare väčšiny jadier, a taktiež robí hrubé predpovede o väzobnej energii. Korešpondujúca hmotnostná formula je definovaná čisto v premenných počtov protonov Z a neutrónov N v konkrétnom jadre (počet nukleónov def.: $A = N + Z$). Bethe-Weizsäckerova hmotnostná formula obsahuje päť členov:

1. Objemový člen: $a_V A$
2. Povrchový člen: $-a_S A^{2/3}$
3. Coulombický člen: $-a_C \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}}$
4. Asymetrický (Pauliho) člen: $-a_A \frac{(N-Z)^2}{A}$

5. Párovací člen: $\delta(N, Z)$, ktorý je navyše def. ako

$$\delta(N, Z) = \begin{cases} +\delta_0 & Z, N \text{ even } (A \text{ even}) \\ 0 & A \text{ odd} \\ -\delta_0 & Z, N \text{ odd } (A \text{ even}) \end{cases} \quad (1)$$

kde sme δ_0 uvažovali ako:

$$\delta_0 = a_P A^{k_P} \quad (2)$$

Hodnota exponentu k_P je určená z nameraných dát väzobnej energie. V minulosti bola jeho hodnota často považovaná za $-3/4$, ale moderné experimentálne dáta indikujú, že je bližšie k hodnote $-1/2$, teda dostaneme pre rôzne k_P aj rôzne hodnoty koeficientov a_P [7]:

$$\delta_0 = a_P A^{1/2} \text{ alebo } \delta_0 = a_{P'} A^{3/4} \quad (3)$$

Teda celkovo máme Bethe-Weizsäckerovu hmotnostnú formulu v tvare:

$$B(N, Z) = a_V A - a_S A^{2/3} - a_C \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} - a_A \frac{(N-Z)^2}{A} + \delta(N, Z) \quad (4)$$

3.2 Výpočet koeficientov

Metóda používaná na vypočítavanie koeficientov Bethe-Weizsäckerovej formuly (ďalej B-W formula) je fitovanie na experimentálne namerané hmotnosti jadier.

3.3 Garvey-Kelsonove relácie

Okrem spomínaného kvapkového modelu jadra existujú aj iné, zložitejšie modely, z ktorých môžeme napríklad spomenúť orbitálny model jadra (česky: slupkový model), ktorý pracuje s analógiou elektrónového obalu, kde sú ale na jednotlivých energetických hladinách nukleóny. Fyzikálna podstata tohto modelu je bližšie k našim aktuálnym kvantovo-mechanickým predstavám o atómovom jadre ako nami používaný kvapkový model jadra.

Oproti týmto dvom spomenutým modelom, Garvey-Kelsonove relácie popisujú jadro lokálne v najjednoduchšej podobe vzťahom, ktorý Garvey s Kelsonom odvodili v roku 1966 v [8]:

$$M(N+2, Z-2) - M(N, Z) + M(N, Z-1) - M(N+1, Z-2) + M(N+1, Z) - M(N+2, Z-1) = 0 \quad (5)$$

kde $M(N, Z)$ je hmotnosť, resp. väzobná energia jadra s počtom neutrónov N a protónov Z . Tieto relácie (5) určite nenahradia hmotnostnú formulu, ale môžu byť veľmi užitočné kvôli ich jednoduchosti a väčšej presnosti robiť predpovede o hmotnostiach základných stavov. Tieto relácie sú založené na modele jadra ako model nezávislých častíc (v [8] nazývané ako tzv. independent-particle model of nucleus"). Interakčná energia systému nukleónov je zložená z elektrostatičného členu a z jadrového členu. Ale zahrnutím obrazu nezávislej častice sú nukleóny popisované ako pohybujúce sa vo vlastnom jednočasticovom poli. Z tohto obrazu dostal Garvey s Kelsonom relácie (5). Tieto hmotnostné relácie môžu byť použité s existujúcimi (nameranými) hmotnosťami jednoduchou extrapoláciou k dopočítaniu neznámych hmotností jadier bezprostredne susediacich s jadrami, ktorých hmotnosti poznáme. Toto neskôr v roku 1969, v [4], aj odvodili skonštruovaním tabuľky hmotností prvkov. Stávali tu ďalej na základoch položených ich predošlým článkom a prišli aj k ekvivalentnej relácii (5), resp. odvodili, že (5) a (6) sú jednoduché riešenia ± 1 podmienky (7), ktorú získali tak aby sa im efektívne odčítali neutrón-neutrónové a protón-protónové interakcie. Na dôkladnejšie odvodenie viz. [4].

$$M(N+2, Z) - M(N, Z-2) + M(N+1, Z-2) - M(N+2, Z-1) + M(N, Z-1) - M(N+1, Z) = 0 \quad (6)$$

$$\Delta Z_2 \Delta N_1 = \Delta Z_3 \Delta N_3 \quad (7)$$

4 Spracovávanie a výsledky projektu

4.1 Načítavanie dát

Tento projekt bol z prevažnej časti spracovávaný v programovacom jazyku Python. Preto bolo potrebné ako prvé načítať dáta z textového súboru [3], ktorý obsahoval väzobné energie a hmotnosti jadier s príslušným počtom protónov a neutrónov. Po potrebnej úprave textového súboru do vhodného tvaru sme mohli naším programom načítať jednotlivé dáta a takto si ich pripraviť na ďalšie upravovanie.

4.2 Väzobné energie a výpočet koeficientov B-W formuly

Ako bolo popísané v teoretickej časti, získavame príslušné koeficienty a_V , a_S , a_C , a_A a a_P , resp. $a_{P'}$ fitovaním experimentálnych hodnôt väzobných energií pomocou B-W formuly.

Označme experimentálne namerané hodnoty väzobných energií $B_E(N, Z)$ a teoretickú hodnotu väzobnej energie vypočítanú zo vzťahu (4) označme $B_T(N, Z, a_V, a_S, a_C, a_A, a_P)$. V dátovom súbore [3] máme väzobné energie na nukleón, teda vydelené hodnotou nukleónového čísla A . Podľa tohto teda používame $B_T(N, Z, a_V, a_S, \dots)$ ako (4), ale vydelené A , teda aby sme tu tiež mali väzobnú energiu na nukleón.

Fitovanie je vlastne úloha na minimalizáciu:

$$\min_{a_V, a_S, a_C, a_A, a_P} \sum_{N, Z} \left| \frac{B_E(N, Z) - B_T(N, Z, a_V, a_S, \dots)}{\sigma_E(N, Z)} \right|^2 := R^2 \quad (8)$$

Aby sme našli minimum vzťahu (8), R^2 budeme derivovať podľa premenných a_V , a_S , a_C , a_A a a_P , resp. $a_{P'}$, a pokladáme tieto derivácie rovné nule. Takto dostaneme päť rovníc s piatimi neznámymi:

$$\begin{pmatrix} -V_1 & S_1 & C_1 & A_1 & -P_1 \\ -V_2 & S_2 & C_2 & A_2 & -P_2 \\ -V_3 & S_3 & C_3 & A_3 & -P_3 \\ -V_4 & S_4 & C_4 & A_4 & -P_4 \\ -V_5 & S_5 & C_5 & A_5 & -P_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_V \\ a_S \\ a_C \\ a_A \\ a_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -B_1 \\ -B_2 \\ -B_3 \\ -B_4 \\ -B_5 \end{pmatrix} \quad (9)$$

kde značíme členy nasledovne: V - objemový člen, S - povrchový člen, C - coulombický člen, A - asymetrický člen, P - párovací člen, a indexy 1 až 5 nám značia podľa ktorej premennej derivujeme R^2 v zaužívanom poradí, v akom sme ich aj doteraz vždy vymenovali. Jednotlivými členmi V, S, \dots myslíme sumy, ktoré sa objavia pri derivovaní pred príslušnými koeficientami a_V, a_S, \dots . Ako príklad uvedme derivovanie R^2 podľa a_V (uvažujeme $k_P = -1/2$ a v závislosti na tom či máme Z, N párne alebo nepárne sa nám bude meniť znamienko pred a_P a pri A nepárnom bude nulové):

$$\begin{aligned} \frac{\partial R^2}{\partial a_V} = \sum_{N, Z} \frac{B_E(N, Z)}{\sigma_E^2(N, Z)} - a_V \sum_{N, Z} \frac{1}{\sigma_E^2(N, Z)} + a_S \sum_{N, Z} \frac{1}{A^{1/3} \sigma_E^2(N, Z)} + a_C \sum_{N, Z} \frac{Z(Z-1)}{A^{4/3} \sigma_E^2(N, Z)} \\ + a_A \sum_{N, Z} \frac{(N-Z)^2}{A^2 \sigma_E^2(N, Z)} - a_P \sum_{N, Z} \frac{1}{A^{3/2} \sigma_E^2(N, Z)} = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

ktorú si prevedieme do nášho značenia ako:

$$\frac{\partial R^2}{\partial a_V} = B_1 - a_V V_1 + a_S S_1 + a_C C_1 + a_A A_1 - a_P P_1 = 0 \quad (11)$$

A analogicky zvyšné štyri rovnice a dostaneme maticovú rovnosť ako ju vidíme v (9). Jednotlivé sumy počítame pomocou nášho programu cez všetky N, Z , $B_E(N, Z)$ a $\sigma_E^2(N, Z)$. Následne potom pomocou programu v jazyku Python vypočítame sústavu rovníc (9) a dostaneme príslušné koeficienty a_V , a_S , a_C , a_A a a_P , resp. $a_{P'}$, kde $a_{P'}$ dostaneme pri uvažovaní $k_P = -3/4$ namiesto doterajšieho $k_P = -1/2$.

4.3 Vykresľovanie $\Delta B(N, Z)$

Akonáhle máme optimálne hodnoty koeficientov a_V, a_S, a_C, a_A a a_P , môžeme vypočítať teoretickú hodnotu $B_T(N, Z, a_V, a_S, \dots)$ vychádzajúcu z Bethe-Weizsäckerovej formuly a porovnať ju s experimentálne nameranou hodnotou $B_E(N, Z)$. To môžeme urobiť graficky zobrazením závislosti:

$$\Delta B(N, Z) = B_E(N, Z) - B_T(N, Z, a_V, a_S, \dots) \quad (12)$$

kde zobrazujeme závislosť na N a Z , teda cez všetky jadrá. Na to budeme potrebovať trojrozmerný graf, ktorý dosiahneme tak, že budeme hodnoty $\Delta B(N, Z)$ vykresľovať ako sfarbenie a tradičné osy x a y budú počet neutrónov N a protónov Z . K tomu používame funkciu v Pythone z knižnice matplotlib: `matplotlib.pyplot.contourf()`

V nami používanom dátovom súbore z [3] boli okrem údajov väzobných energií udané aj ich chyby. Fit bol vykonávaný s ohľadom na chybu v dvoch variantách a to s položením chyby väzobnej energie $\sigma_E = 1$ alebo s uvažovaním chyby ako bola uvedená v dátovom súbore. Pri druhej variante sme museli vykonávať aj úpravu, pretože ak bola chyba menšia ako tisícina, tak nebola udávaná, resp. udávaná vo formáte 0,000, čo je prakticky nula. Vieme ale, že toto nastalo, pretože chyba nebola vypisovaná, ak bola rovná alebo menšia ako 0,0005. Teda sme v tomto prípade museli vykonať úpravu a priblíženie vo forme, že sme vždy v prípade keď bolo v dátovom súbore 0,000 brali chybu ako 0,0005, čo je naša aproximácia hornej hranice tejto chyby, keďže mohla byť v týchto prípadoch chyba aj menšia.

Fitovanie bolo taktiež vykonávané v iných dvoch variantách a to s ohľadom na to či sme vykonávali fit väzobnej energie na nukleón alebo celkovej väzobnej energie. Pri fite celkovej väzobnej energie nám to následne spôsobí to, že bude presnejšie fit popisovať ťažšie jadrá keďže násobíme fit druhou mocninou nukleónového čísla A^2 .

Prvý prípad závislosti $\Delta B(N, Z)$, kde sme fitovali väzobnú energiu na nukleón B/A , pokladali chybu $\sigma_E = 1$ a exponent párovacieho členu bol $k_P = -1/2$, je na Grafe 1. Na Grafe 2 je rovnaká závislosť, až na to, že chybu sme brali z dátového súboru, teda sme fit vážili chybou, a pracovali s ňou spôsobom aký sme už v predchádzajúcich odsekoch v tejto časti opísali.

Na Grafe 3 je závislosť $\Delta B(N, Z)$, kde sme fitovali celkovú väzobnú energiu, pokladali chybu $\sigma_E = 1$ a exponent párovacieho členu bol znovu $k_P = -1/2$. A nakoniec na Grafe 4 je rovnaká závislosť až nato, že sme brali chybu z dátového súboru.

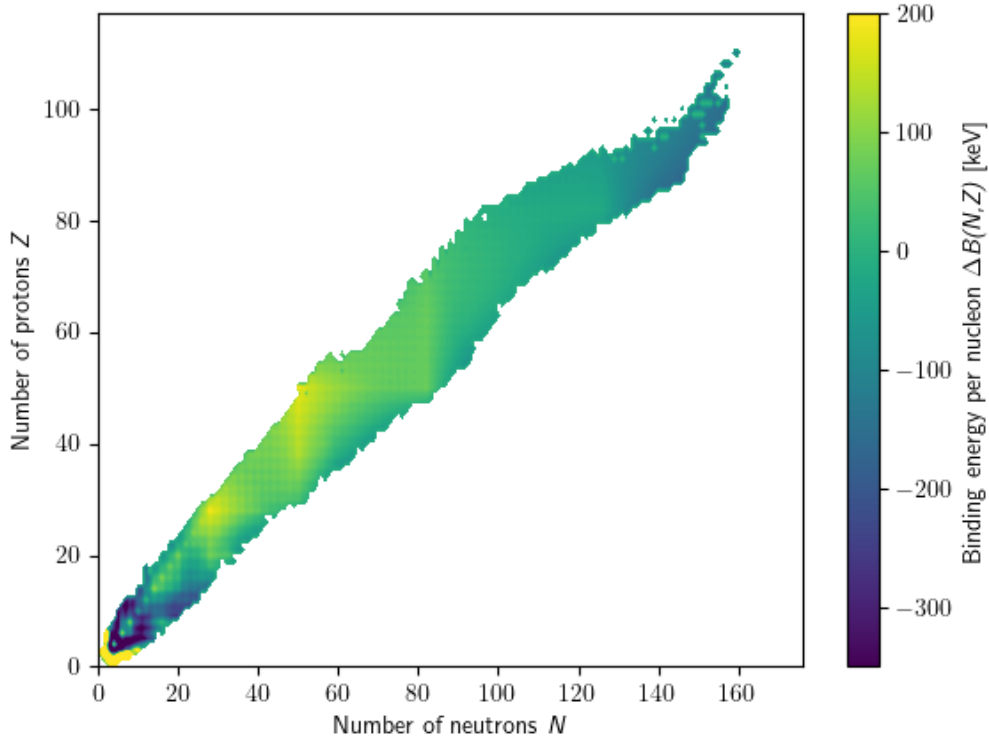
Koeficienty Bethe-Weizsäckerovej formuly pre jednotlivé prípady boli vypísané do Tabuľky 1 pre fitovanie väzobnej energie na nukleón a do Tabuľky 2 pre fitovanie celkovej väzobnej energie B_{tot} . Tu sme narozdiel od grafov porovnávali aj prípady kedy bol exponent párovacieho členu iný ako $-1/2$ a to teda prípad kedy $k_P = -3/4$. Graficky tieto prípady znázornené neboli z toho dôvodu, že prípady kde sa líšil iba exponent k_P boli graficky prakticky identické.

σ_E [keV]	1	1	σ_E	σ_E
k_P	-1/2	-3/4	-1/2	-3/4
a_V [MeV]	14,03	14,03	13,74	13,90
a_S [MeV]	13,62	13,61	13,22	13,53
a_C [MeV]	0,575	0,575	0,514	0,539
a_A [MeV]	16,69	16,68	16,70	16,20
a_P [MeV]	4,87	6,87	13,50	20,39
R	2,49	2,49	2,87	2,79

Tabuľka 1: Koeficienty fitu Bethe-Weizsäckerovej formuly väzobnej energie na nukleón B/A s ohľadom na chybu väzobnej energie σ_E a exponent párovacieho členu k_P

4.4 Garvey-Kelsonove relácie

Posledná časť nášho projektu bola overením platnosti a presnosti Garvey-Kelsonových relácií. Keďže máme spracované dáta experimentálne nameraných jadrových hmotností načítané v našom programe s predchádzajúcich úloh, môžeme pristúpiť k overeniu týchto relácií medzi susednými jadrami v jadrovej



Graf 1: Väzobná energia na nukleón s $\sigma_E = 1$ a $k_P = -1/2$

σ_E [keV]	1	1	σ_E	σ_E
k_P	-1/2	-3/4	-1/2	-3/4
a_V [MeV]	15,27	15,27	15,60	15,61
a_S [MeV]	16,43	16,42	17,49	17,51
a_C [MeV]	0,686	0,686	0,717	0,719
a_A [MeV]	22,17	22,16	21,15	21,18
a_P [MeV]	10,77	22,49	11,48	21,53
R	3,40	3,47	3,42	3,47

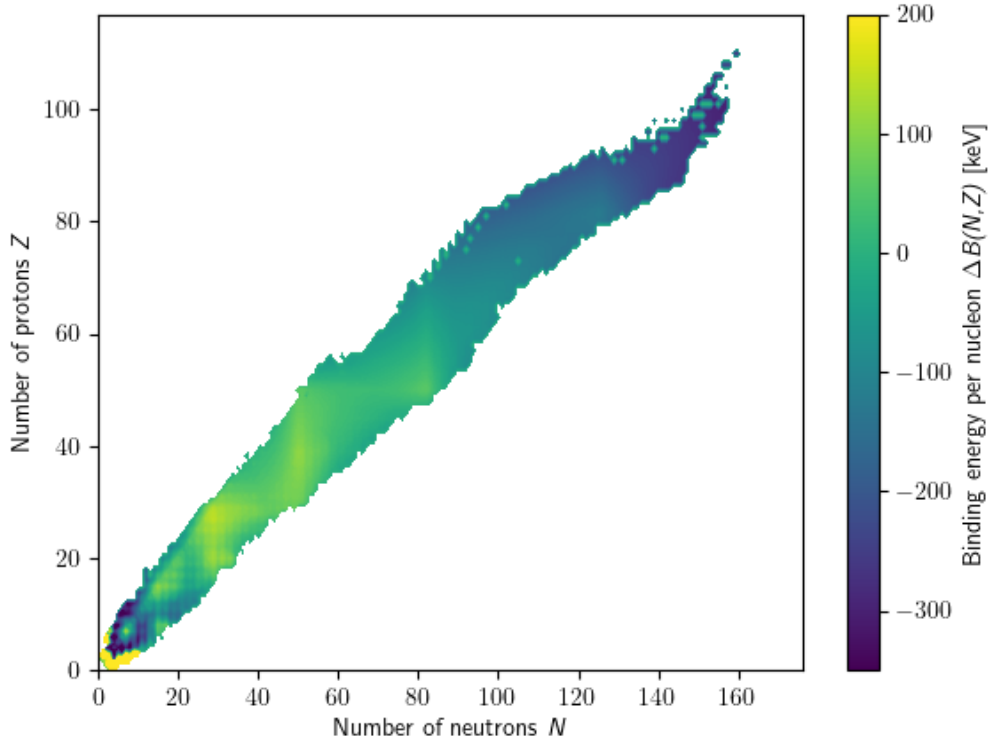
Tabuľka 2: Koeficienty fitu Bethe-Weizsäckerovej formuly celkovej väzobnej energie B_{tot} s ohľadom na chybu väzobnej energie σ_E a exponent párovacieho členu k_P

tabuľke oveľa ľahšie. Aplikujeme vzťahy (5) a (6), ktoré obidve samostatne definujú Garvey-Kelsonove relácie a prejdeme cez všetky jadrá, resp. cez všetky N a Z . Sčítavaním jednotlivých členov v (5) a (6) nedostaneme na pravej strane rovnice 0, ale práve hodnotu energie, ktorá nám bude charakterizovať ako blízko a presne popisujú Garvey-Kelsonove relácie experimentálne namerané hmotnosti. Taktiež nám to povie veľa o ich schopnosti predpovedať hmotnosti jadier, keďže výsledok na pravej strane rovnice je rozdiel medzi experimentálne nameranou hodnotou energie daného jadra a predpovedanou hodnotou tejto energie Garvey-Kelsonovými reláciami.

Výsledky výpočtov týchto hmotnostných relácií boli spracované graficky na Graf 5 pre Garvey-Kelsonove relácie v tvare (5) a na Graf 6 pre pre relácie v tvare (6).

5 Diskusia výsledkov

Pozorovaním graficky znázornených výsledkov rozdielu experimentálne nameraných hodnôt väzobných energií jadier a väzobných energií, ktoré nám vyšli z teoretického modelu jadra fitovaním, môžeme povedať o aký dobrý teoretický model jadra sa jedná a aké sú jeho obmedzenia v reálnom popise

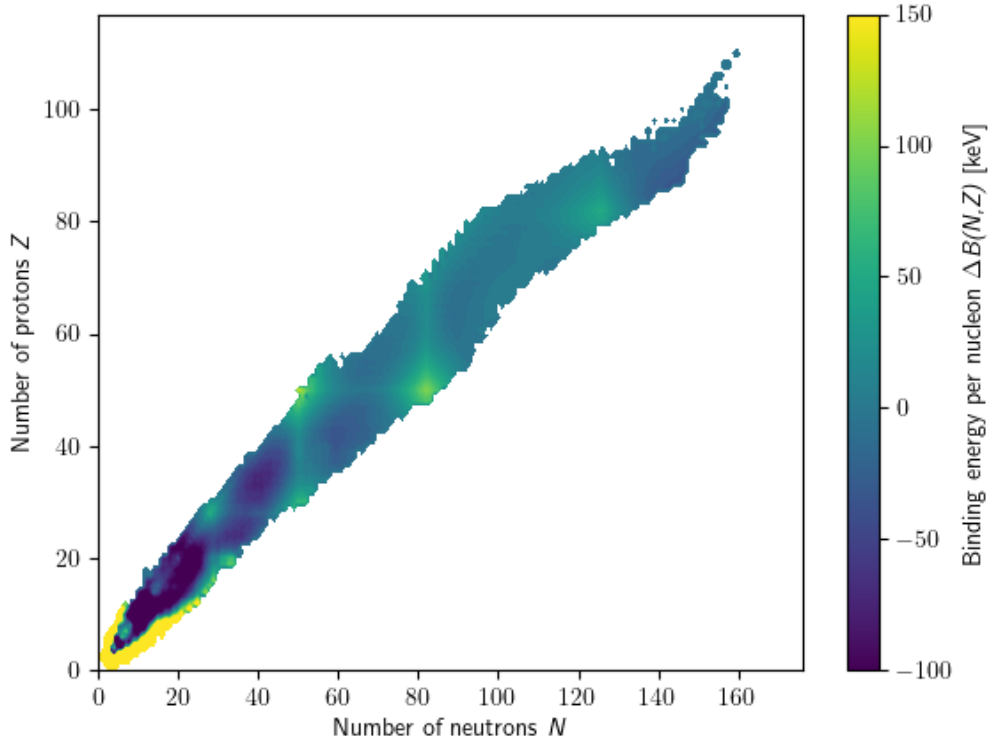


Graf 2: Vázobná energia na nukleón s chybou a $k_P = -1/2$

daného jadra nejakého prvku. Ako prvá zjavná vec, ktorú môžeme pozorovať na prakticky každom grafe $\Delta B(N, Z)$ a obzvlášť na Grafoch 3 a 4, je to, že kvapkový model jadra, popísaný Bethe-Weizsäckerovou formulou nepopisuje dobre ľahké jadrá, resp. jadrá s malým Z a N . Pozorujeme, že sa jedná hlavne o jadrá s $N < 10$ (napr. Graf 1 a 2). To, že sa táto oblasť vysokých $\Delta B(N, Z)$ zväčšila až k Z a $N = 20$ keď sme fitovali celkovú väzobnú energiu B_{tot} , nie je prekvapivé, keďže tu násobíme väzobnú energiu druhou mocninou nukleónového čísla A^2 , teda fyzikálne lepšie fitujeme ťažšie jadrá. Tohoto dôsledkom je aj to, že práve pri fitovaní B_{tot} pozorujeme nižšie rozdiely $\Delta B(N, Z)$, v rozmedzí -100 až 150 keV, pre Z a N väčšie ako približne 30.

To, že kvapkový model jadra popisuje lepšie ťažšie jadrá korešponduje s tým ako fyzikálne rozumieme tomuto modelu a to, že jadro chápeme ako nabitú kvapku. Táto predstava jadra je dostatočne blízka realite práve vďaka kolektívnemu správaniu nukleónov. Oproti tomu pre jadrá skladajúce sa z málo nukleónov nám táto predstava už nestačí. Tu je potrebné už brať na ohľad kvantovo-mechanické predstavy, čo sa prejavuje napríklad v už spomínanom orbitálovom modeli jadra. Tento model berie do úvahy, že jednotlivé nukleóny sú v tzv. strednom poli a nachádzajú sa na energetických hladinách popísaných energetickým spektrom lineárneho harmonického oscilátora a na týchto hladinách podliehajú Pauliho vylučovaciemu princípu. Kvôli tomuto vidíme, že je analógiou elektrónového obalu atómu, kde popis vlnovej funkcie elektrónu nazývame orbitálom, z čoho vychádza názov orbitálový model jadra. Práve kvôli tomu, že tieto predstavy z kvantovej mechaniky kvapkový model nezahŕňa, pozorujeme väčšie rozdiely $\Delta B(N, Z)$ na miestach kde sa Z a N rovnajú magickým číslam, ktoré práve v orbitálovom modeli jadra odpovedajú zaplneniu hladín nukleónmi. Toto je dobre vidieť na Grafe 3, pre Z a N rovné 20, 28, 50, 82 a 126, čo sú všetko magické čísla. Tu sú odchýlky od nami používaného modelu jadra ako nabitej kvapky najväčšie pre oblasti ťažších jadier.

Koeficienty Bethe-Weizsäckerovej formuly sme počítali pre niekoľko rôznych prípadov a to s ohľadom na započítanie chyby do fitu, na tom či fitujeme celkovú väzobnú energiu alebo energiu na nukleón a nakoniec s ohľadom na exponent párovacieho členu. Rozdiely medzi prípadmi s fitovaním B_{tot} a B/A sme už diskutovali, takže ich v tejto časti ďalej do detailov rozoberať nebudeme. Zaujímavý je prípad zmeny exponentu medzi $k_P = -1/2$ a $k_P = -3/4$. V Tabuľke 1 (B/A) pozorujeme, že pre $\sigma_E = 1$ keV



Graf 3: Celková väzobná energia s chybou $\sigma_E = 1$ a $k_P = -1/2$

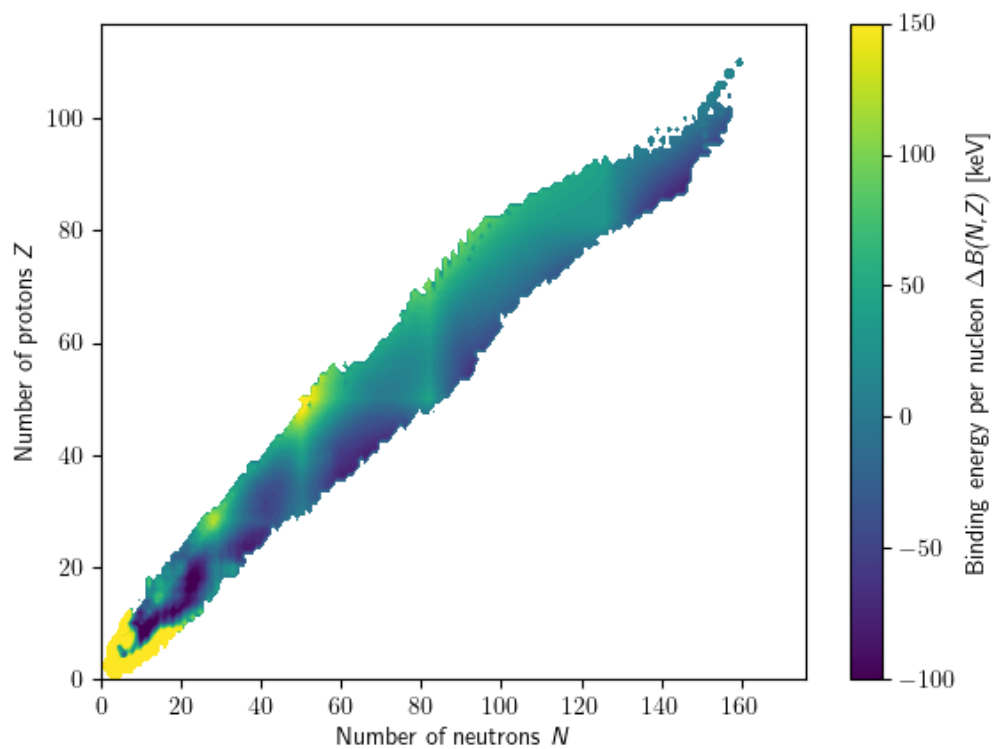
sa poriadne s exponentom zmenil len koeficient a_P a aj to málo oproti prípadu σ_E , kde sa zmenil koeficient a_P takmer o 7 MeV. Táto zmena sa ale graficky prejaví len skutočne minimálne. Je zaujímavé k povšimnutiu, že toto je zároveň jediný prípad kedy je fit lepší pre prípad $k_P = -3/4$. Toto môžeme vidieť z hodnoty R , ktorá je pre $k_P = -3/4$ menšia.

V Tabulke 2 (B_{tot}) si môžeme všimnúť, že podobne ako v Tabulke 1, so zmenou exponentu k_P sa značne mení len koeficient a_P . Pozorujeme zmenu zhruba o 10 MeV, čo sa zase zdá byť ako dosť, ale na grafoch neboli pozorované takmer žiadne zmeny pri zmene k_P .

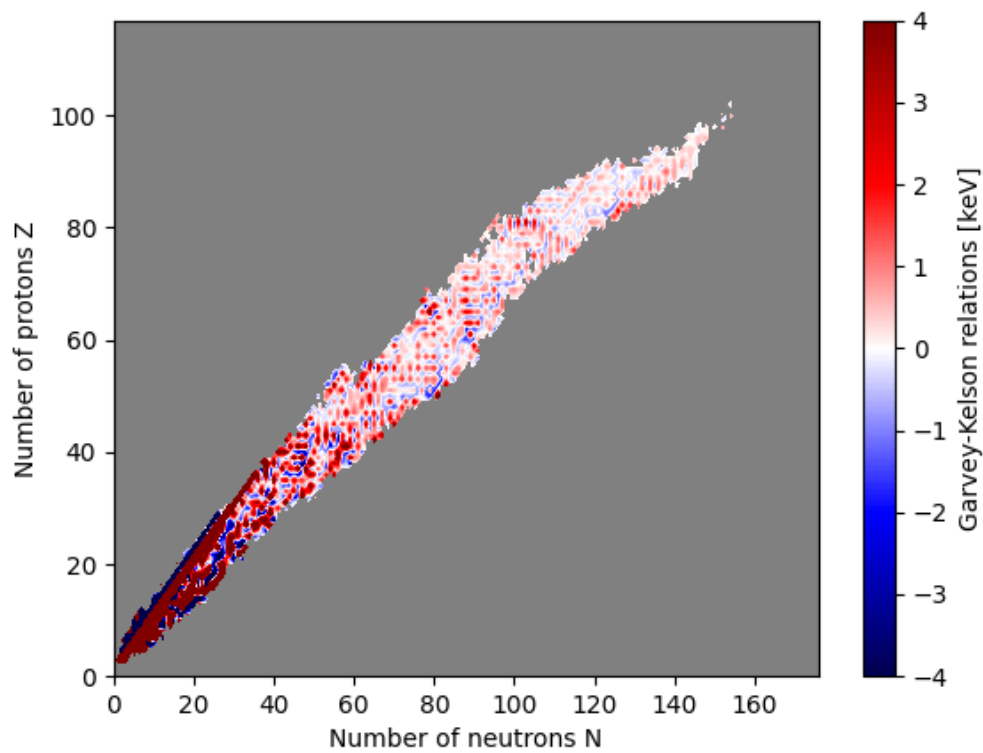
V ďalšom budeme uvažovať nad výsledkami vykreslenia Garvey-Kelsonových relácií. Pozorujeme, že obidve verzie relácií dávajú výsledky ukazujúce na veľmi malé hodnoty energií na pravej strane rovnosti a teda ukazujú na to, že predpovedané hmotnosti Garvey-Kelsonovými reláciami by boli veľmi blízke reálnej hodnote. Tieto rozdiely sa pohybujú v jednotkách keV ako môžeme vidieť na Grafoch 5 a 6. Na Grafoch 7 a 8 môžeme pozorovať, že aj modré a červené štruktúry nám už takmer úplne miznú v oblastiach ťažších jadier pri hodnotách energií v desiatkach keV. Toto ukazuje na veľmi dobrú prediktívnu schopnosť Garvey-Kelsonových relácií, aj keď dokážu predpovedať hmotnosti len lokálne môžeme s istotou zhodnotiť, že táto predpoveď bude učinená s veľkou istotou.

Napriek tomu ale môžeme vidieť, že ako aj pri kvapkovom modele, aj Garvey-Kelsonove relácie nefungujú tak dobre pre ľahké jadrá. Hoci ale pozorujeme veľké rozdiely medzi predpovedanou hmotnosťou a experimentálne nameranou hodnotou, ani v týchto oblastiach sme nepozorovali väčší rozdiel ako 2 MeV a aj to bol ojedinelý prípad v tejto oblasti, od ktorého ďalej tieto rozdiely rapídne klesali do stoviek až k desiatkam keV. Čo je stále v prevažnej väčšine dobrá zhoda.

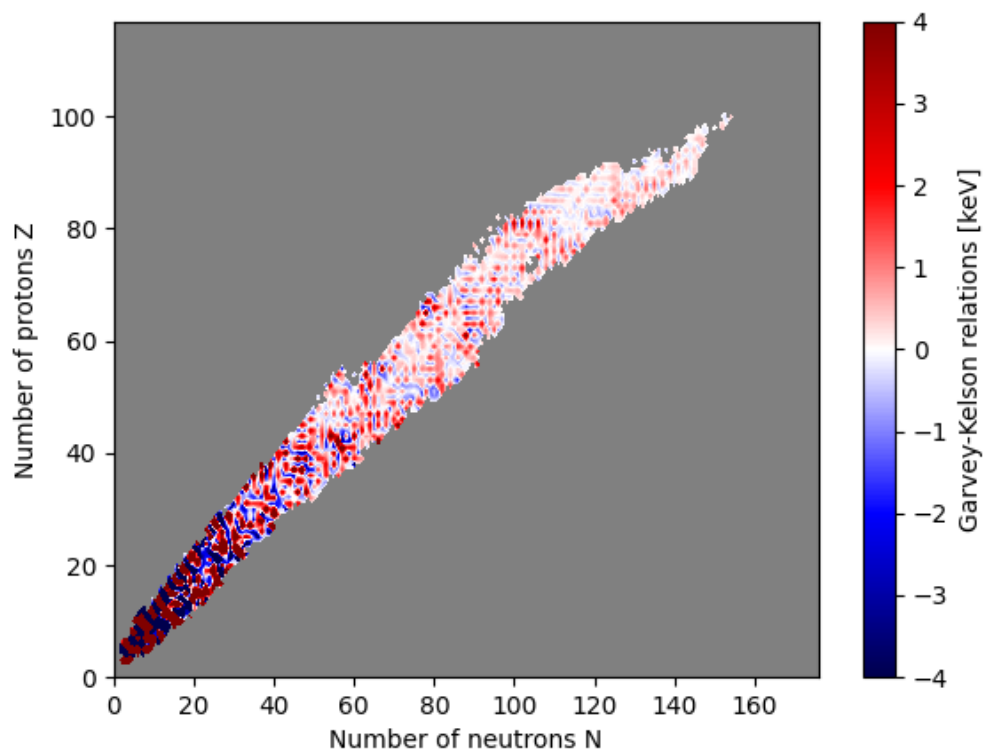
Na Grafe 5 pozorujeme čiaru veľkých rozdielov medzi predpoveďou a nameranými hmotnosťami. Táto čiara odpovedá prípadu kedy $N = Z$. Tento prípad autori v článku [4] spomínajú ako prípad kedy nastávajú problémy so vzťahom (5) a požaduje sa aby v tomto prípade, kedy $N = Z$ nebolo N nepárne. K vzťahu (5) spomínajú taktiež podmienku aby $N > Z$. Vieme ale, že táto podmienka pre väčšinu jadier platí. Dôvod prečo $N > Z$ je podmienkou pre vzťah (5) je, že nesprávny prechod cez čiaru $N = Z$ bude viesť k prípadom, kde závislosť izospinu na reziduálnych interakciách sa poriadne navzájom nevyruší. Na druhej strane v prípade vzťahu (6), rozdiely medzi stavmi s rovnakým izospinom sa vždy



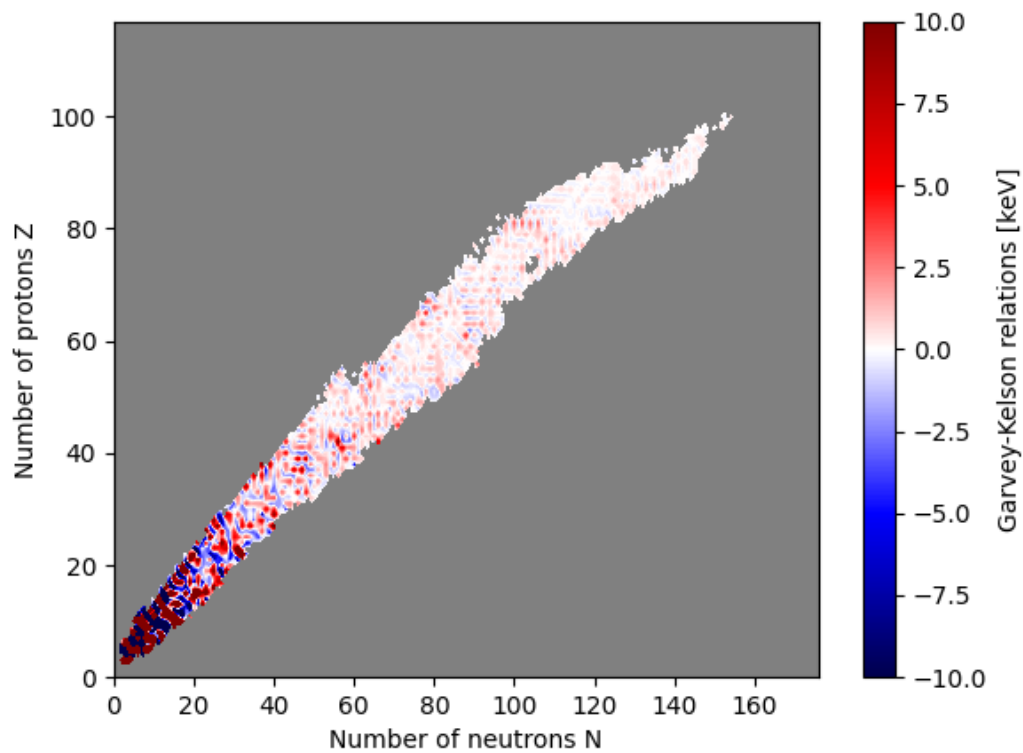
Graf 4: Celková väzobná energia s chybou a $k_P = -1/2$



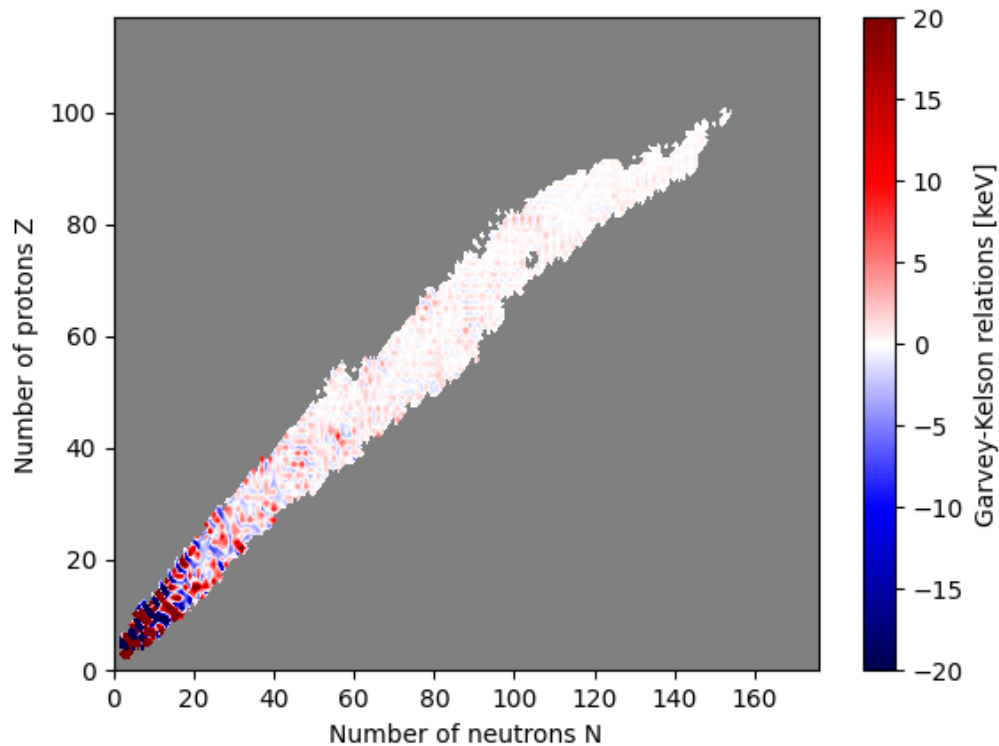
Graf 5: Garvey-Kelsonove relácie podľa vzťahu (5)



Graf 6: Garvey-Kelsonove relácie podľa vzťahu (6)



Graf 7: Garvey-Kelsonove relácie s rozsahom kontúr od -10 keV do 10 keV



Graf 8: Garvey-Kelsonove relácie s rozsahom kontúr od -20 keV do 20 keV

zoberú, takže táto ťažkosť sa v tomto prípade nevyskytne. Toto bolo tiež overené, keďže na Grafe 6, ktorý zobrazuje práve Garvey-Kelsonove relácie v tvare (6), nepozorujeme spomínanú čiaru $N = Z$.

6 Záver

V tomto projekte som sa naučil o niekoľkých modeloch popisujúcich atómové jadro a jeho hmotnosti. Zoznámil som sa taktiež s meraniami atómových hmotností a tieto experimentálne hodnoty som spracovával v programovacom jazyku Python. Fitovaním experimentálnych dát som určil parametry fenomenologického modelu jadrových hmotností, tzv. Bethe-Wizsäckerovej hmotnostnej formuly (kvapkový model jadra). Ďalej som tento model analyzoval, s hlavným dôrazom na odchýlky medzi teoretickými predpoveďami a nameranými hmotnosťami jadier. Kvalitatívne som tento model porovnával aj s iným modelom atómového jadra (orbitálovým modelom jadra), ktorý berie do úvahy aj kvantovo-mechanické predstavy o atómovom jadre.

Taktiež som overil aj presnosť a platnosť Garvey-Kelsonových relácií, ktoré vyjadrujú lokálne korelácie medzi hmotnosťami atómových jadier.

Literatúra

- [1] W.J. Huang et al., Chinese Physics C 41, 030002 (2017)
- [2] M. Huang et al., Chinese Physics C 41, 030003 (2017)
- [3] Nuclear masses tables. [online]. [2020-11-22]. <https://www-nds.iaea.org/amdc/>
- [4] G.T. Garvey et al., Review of Modern Physics 41, S1 (1969)
- [5] J. Barea et al., Physical Review C 77, 041304 (2008)
- [6] Liquid drop model. [online]. [2020-11-22]. <https://www.britannica.com/science/liquid-drop-model>
- [7] Semi-empirical mass formula. [online]. [2020-11-23]. https://en.wikipedia.org/wiki/Semi-empirical_mass_formula
- [8] G.T. Garvey and Itzhak Kelson. New Nuclidic Mass Relationship. Physical Review Letters, Volume 16, Number 5 (1966)