

## Domácí úkol – Jednoduché kvantové systémy (termín odevzdání: 20.10.2021, 21.10.2021)

### Dvouhadinový systém s interakcí

Uvažujte jednoduchý dvouhadinový systém popsany Hamiltoniánem

$$H_0 = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & -e \end{pmatrix} = e\sigma_3,$$

jehož vlastní čísla jsou  $\pm e \in \mathbb{R}$  a odpovídající normalizované vlastní vektory

$$|e_+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |e_-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

K systému je přidána interakce

$$H_I = \begin{pmatrix} 0 & v \\ v & 0 \end{pmatrix} = v\sigma_1,$$

kde  $v \in \mathbb{R}$ .

1. Spočítejte vlastní hodnoty  $E_+, E_-$  ( $E_- \leq E_+$ ) a odpovídající *normalizované* vlastní vektory  $|E_+\rangle, |E_-\rangle$  systému popsaneho Hamiltoniánem  $H = H_0 + H_I$ .
2. Zakreslete závislost energetických hladin  $E_{\pm}$  na parametru  $v$  a určete vlastní vektory  $|E_{\pm}(v)\rangle$  pro (a)  $v = 0$ , (b)  $v \rightarrow \pm\infty$ .

### Kvantový řetízek

Určete vlastní hodnoty a normalizované vlastní vektory Hamiltoniánu dimenze  $N$  ve tvaru tridiagonální matice

$$H = \begin{pmatrix} e & v & 0 & 0 & & \\ v & e & v & 0 & & \\ 0 & v & e & v & \dots & \\ 0 & 0 & v & e & & \\ & & \vdots & & \ddots & \end{pmatrix}.$$

Jak se bude měnit energetické spektrum s rostoucím  $N$ ?

**Nápověda:** V charakteristické rovnici identifikujte diferenční rovnici pro složky  $c_k, k = 1, \dots, n$  vlastních vektorů a řešte ji pomocí násady  $c_k = u^k$ .

**Poznámka:** Tento Hamiltonián popisuje například částici na řetízku délky  $N$ , která smí „přeskočit“ jen na sousední pozice:

$$\hat{H} = e \sum_{k=1}^N |k\rangle \langle k| + v \sum_{n=1}^{N-1} (|k\rangle \langle k+1| + |k+1\rangle \langle k|),$$

kde  $\{|k\rangle, k = 1, \dots, N\}$  je ortonormální báze. V případě, kdy  $N$  je velké, se jedná o jednoduchý model jednorozměrného krystalu.

### Kvantový oblak

Určete vlastní hodnoty a normalizované vlastní vektory Hamiltoniánu dimenze  $N$  daného maticí

$$H = \begin{pmatrix} e & v & v & v & & \\ v & e & v & v & & \\ v & v & e & v & \dots & \\ v & v & v & e & & \\ & & \vdots & & \ddots & \end{pmatrix}.$$

Tento Hamiltonián popisuje například částici na mřížce o  $N$  pozicích, přičemž částice může přeskočit na libovolnou pozici mřížky a žádná pozice není upřednostněna.