

**Domácí úkol – Kvartický oscilátor** (termín odevzdání: 27.10.2021, 4.11.2021)

1. V jednorozměrném harmonickém oscilátoru popsaném Hamiltoniánem

$$\hat{H}_0 = \frac{1}{2M} \hat{p}^2 + \frac{1}{2} M \Omega^2 \hat{x}^2$$

vyjádřete maticové elementy

$$\begin{aligned} \langle m | \hat{x}^2 | n \rangle, \\ \langle m | \hat{x}^4 | n \rangle, \end{aligned}$$

kde  $|m\rangle$  a  $|n\rangle$  jsou dva libovolné vlastní vektory Hamiltoniánu  $\hat{H}_0$ .

2. Je zadán Hamiltonián

$$\hat{H} = \frac{1}{2M} \hat{p}^2 + \frac{1}{2} M \Omega^2 \hat{x}^2 + b \hat{x}^4 = \hat{H}_0 + b \hat{x}^4,$$

kde  $b$  je reálný kladný parametr.

- Napočítejte maticové elementy  $H_{mn} = \langle m | \hat{H} | n \rangle$  pro  $M = \Omega = \hbar = b = 1$  a numerickou diagonalizací matice  $H = (H_{mn})$  (pomocí programů Mathematica, Maple, Matlab, GNU Octave, Python, Julia, knihoven LAPACK, atd.) učete energie základního stavu  $E_0$  a prvních tří vzbuzených stavů  $E_{1,2,3}$  Hamiltoniánu  $\hat{H}$ . Uvažujte pouze konečný počet  $N$  elementů báze, tj.  $m, n = 0, 1, \dots, N - 1$ .
- Zakreslete graf závislosti  $E_j(N)$ ,  $j = 0, 1, 2, 3$  pro  $N \leq 50$ .
- Nalezněte nejmenší velikost matice  $N$  takovou, aby čtyři nejnižší energie byly určeny s přesností na pět platných cifer.

3. Je zadán Hamiltonián

$$\hat{H}' = \frac{1}{2M} \hat{p}^2 - \frac{1}{2} a \hat{x}^2 + b \hat{x}^4,$$

kde  $a > 0, b > 0$ .

- Načtněte klasický potenciál

$$V(x) = -\frac{1}{2} a x^2 + b x^4$$

pro  $a = b = 1$  a nalezněte jeho stacionární body.

- Vypočítejte numericky první čtyři energetické hladiny pro  $\hbar = 0.02, M = a = b = 1$ . Velikost matice ať je taková, aby tyto hladiny byly určeny s přesností alespoň na pět platných cifer.
- Proč jsou dvojice hladin  $(E_0, E_1)$  a  $(E_2, E_3)$  v téměř degenerovaných dubletech?
- Opakujte výpočet pro jiné hodnoty  $\hbar$  a diskutujte, jaký vliv má volba  $\hbar$  na výsledné spektrum.

*Poznámka:* Dvoujámový systém popsaný Hamiltoniánem  $\hat{H}'$  se používá například k modelování amoniakového maseru, k modelování systémů ochlazených iontů, v teorii kvantové informace, při studiu kvantových fázových přechodů nebo v kvantové chemii.