

8 Koherentní stavy harmonického oscilátoru

V této části se navazuje zejména na kapitolu 4 o algebraickém řešení harmonického oscilátoru. Cílem je prozkoumat vlastnosti *koherentního stavu* jednorozměrného harmonického oscilátoru

$$|z\rangle = e^{-\frac{|z|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle, \quad (8.0.1)$$

kde $z \in \mathbb{C}$ je libovolné komplexní číslo a $|n\rangle$ je vlastní stav harmonického oscilátoru (4.1.3) příslušející energii E_n , dané vztahem (4.2.14).

Níže uvedený postup je deduktivní a vychází z definice koherentního stavu (8.0.1). Dá se však postupovat i opačně: (i) buď hledat stavy harmonického oscilátoru, které minimalizují relace neurčitosti (8.4.12), jak je popsáno v práci [9] (strana 220), nebo hledat takové stavy, které co nejlépe aproximují pohyb klasické částice, tj. splňují vztah (8.5.9) pro střední hodnoty $\hat{x}$ a $\hat{p}$. Tento postup je sledován například v učebnici [10].

8.1 Poissonovo rozdělení

Poissonovo rozdělení udává počet n výskytu jevů v určitém intervalu, pokud jsou jednotlivé jevy statisticky nezávislé. Rozdělení je dáno předpisem

$$P_n = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}, \quad (8.1.1)$$

kde λ je parametr Poissonova rozdělení.

1. Ukažte, že rozdělení je normalizované.
2. Nalezněte střední hodnotu Poissonova rozdělení.
3. Nalezněte rozptyl Poissonova rozdělení.

Řešení:

1. Normalizace

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1. \quad (8.1.2)$$

2. Střední hodnota

$$\langle n \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} n P_n = e^{-\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} = e^{-\lambda} \lambda e^{\lambda} = \lambda. \quad (8.1.3)$$

3. Střední hodnota kvadrátu je

$$\begin{aligned} \langle n^2 \rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} n^2 P_n = e^{-\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \underbrace{n}_{n-1+1} \\ &= e^{-\lambda} \left[\lambda^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\lambda^{n-2}}{(n-2)!} + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} \right] \\ &= \lambda^2 + \lambda, \end{aligned} \quad (8.1.4)$$

takže rozptyl vychází

$$(\Delta n)^2 = \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2 = \lambda. \quad (8.1.5)$$

Poissonovo rozdělení má tedy rozptyl i střední hodnotu stejnou a danou velikostí parametru λ .

8.2 Základní vlastnosti koherentních stavů

1. Ukažte, že skalární součin dvou koherentních stavů (8.0.1) je

$$\langle z|z' \rangle = e^{-\frac{|z-z'|^2}{2} + i|z||z'| \sin(\phi' - \phi)}, \quad (8.2.1)$$

kde

$$z = |z| e^{i\phi}, \quad \phi \in [0, 2\pi). \quad (8.2.2)$$

Koherentní stavy jsou tedy normalizované, avšak nejsou navzájem ortogonální, z čehož vyplývá, že $|z\rangle$ nelze vzít za bázi Hilbertova prostoru harmonického oscilátoru (resp. někdy se říká, že báze pomocí koherentních stavů je přeuredená).

2. Ukažte, čemu se rovná pravděpodobnost nalezení stavu $|z'\rangle$, pokud máme systém připravený ve stavu $|z\rangle$.

3. Ukažte, že je splněna relace uzavřenosti ve tvaru

$$\int |z\rangle \langle z| \frac{dz}{\pi} = 1. \quad (8.2.3)$$

4. Ukažte, že rozdělení energií v koherentním stavu je Poissonovo, tj. že lze psát

$$P_n = |\langle n|z \rangle|^2 = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}. \quad (8.2.4)$$

Nalezněte λ .

5. Na základě vlastností Poissonova rozdělení nalezněte, čemu se rovná střední hodnota energie harmonického oscilátoru v koherentním stavu $\langle E \rangle_z$.

Řešení:

1. Na základě definice (8.0.1) platí:

$$\begin{aligned} \langle z|z' \rangle &= e^{-\frac{|z|^2 + |z'|^2}{2}} \sum_{n,n'=0}^{\infty} \frac{(z^*)^n (z')^{n'}}{\sqrt{n!n'!}} \underbrace{\langle n|n' \rangle}_{\delta_{nn'}} \\ &= e^{-\frac{|z|^2 + |z'|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z^* z')^n}{n!}. \end{aligned} \quad (8.2.5)$$

Po zavedení

$$z^* = |z| e^{-i\phi}, \quad z' = |z'| e^{i\phi'} \quad (8.2.6)$$

lze absolutní hodnotu rozdílu dvou komplexních čísel rozepsat jako

$$\begin{aligned} |z - z'|^2 &= (z - z')(z^* - z'^*) \\ &= |z|^2 + |z'|^2 - z z'^* - z^* z' \\ &= |z|^2 + |z'|^2 - |z||z'| e^{i(\phi - \phi')} - |z||z'| e^{-i(\phi - \phi')} \\ &= |z|^2 + |z'|^2 - 2|z||z'| \cos(\phi - \phi'). \end{aligned} \quad (8.2.7)$$

Pak

$$\begin{aligned} \langle z|z' \rangle &= e^{-\frac{|z|^2 + |z'|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n |z'|^n}{n!} e^{in(\phi' - \phi)} \\ &= e^{-\frac{|z|^2 + |z'|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[|z||z'| e^{i(\phi' - \phi)}]^n}{n!} \\ &= e^{-\frac{|z|^2 + |z'|^2}{2}} e^{|z||z'| [\cos(\phi' - \phi) + i \sin(\phi' - \phi)]} \\ &= e^{-\frac{|z-z'|^2}{2} + i|z||z'| \sin(\phi' - \phi)}. \end{aligned} \quad (8.2.8)$$

Je tedy $\langle z|z \rangle = 1$, avšak $\langle z|z' \rangle \neq 0$ je obecně nenulové komplexní číslo.

2. Hledaná pravděpodobnost je dána kvadrátem amplitudy (8.2.1)

$$|\langle z' | z \rangle| = e^{-|z'-z|^2} . \quad (8.2.9)$$

3. Komplexní číslo z se opět vyjádří pomocí velikosti a fáze (8.2.2), kde pro zjednodušení zápisu označíme $r \equiv |z|$. Pak $dz = r dr d\phi$ a integrál relací uzavřenosti dá

$$\begin{aligned} \int |z\rangle \langle z| \frac{dz}{\pi} &= \int e^{-r^2} \sum_{n,n'=0}^{\infty} \frac{r^n e^{in\phi}}{\sqrt{n!}} \frac{r^{n'} e^{-in'\phi}}{\sqrt{n'!}} |n\rangle \langle n'| \frac{r}{\pi} dr d\phi \\ &= \sum_{n,n'=0}^{\infty} \frac{|n\rangle \langle n'|}{\pi \sqrt{n!n'!}} \underbrace{\int_0^{\infty} e^{-r^2} r^{n+n'+1} dr}_{\rho \equiv r^2, \quad d\rho = 2r dr} \underbrace{\int_0^{2\pi} e^{i(n-n')\phi} d\phi}_{2\pi \delta_{nn'}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{\pi} \frac{|n\rangle \langle n|}{n!} \frac{1}{2} \underbrace{\int_0^{\infty} \rho^n e^{-\rho} d\rho}_{\Gamma(n+1)=n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n| = 1 . \end{aligned} \quad (8.2.10)$$

4. Pravděpodobnost se získá dosazením do definičního vztahu (8.2.1)

$$P_n = |\langle n | z \rangle|^2 = \left| e^{-\frac{|z|^2}{2}} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} \right|^2 = e^{-|z|^2} \frac{|z|^{2n}}{n!}$$

a srovnáním s Poissonovým rozdělením (8.1.1)

$$\lambda = |z|^2 . \quad (8.2.11)$$

5. Energie vlastního stavu harmonického oscilátor $|n\rangle$ je dána vztahem (4.2.14). Po dosazení

$$\langle E \rangle_z = \sum_{n=0}^{\infty} \hbar\Omega \left(n + \frac{1}{2} \right) e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} = \hbar\Omega \left(\lambda + \frac{1}{2} \right) = \hbar\Omega \left(|z|^2 + \frac{1}{2} \right) . \quad (8.2.12)$$

8.3 Vlastní stav operátoru $\hat{a}$

1. Ukažte, že pro posunovací operátor $\hat{a}$ platí

$$\boxed{\hat{a} |z\rangle = z |z\rangle} . \quad (8.3.1)$$

To znamená, že koherentní stav $|z\rangle$ je vlastním stavem $\hat{a}$ s vlastní hodnotou z . Operátor $\hat{a}$ není hermitovský, proto jsou jeho vlastní hodnoty komplexní.

2. Ukažte, že neexistuje žádný vlastní stav posunovacího operátoru $\hat{a}^\dagger$.
3. Pomocí Bakerovy-Campellovy-Hausdorffovy formule (??) ukažte, že koherentní stav lze vyjádřit také ve tvaru

$$|z\rangle = e^{z\hat{a}^\dagger - z^*\hat{a}} |0\rangle . \quad (8.3.2)$$

Řešení:

1. Při důkazu se vychází z definice koherentního stavu (8.0.1) a vztahu pro posunovací operátor (4.1.15):

$$\begin{aligned}\hat{a}|z\rangle &= e^{-\frac{|z|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} \underbrace{\hat{a}|n\rangle}_{\sqrt{n}|n-1\rangle} \\ &= z e^{-\frac{|z|^2}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{\sqrt{(n-1)!}} |n-1\rangle \\ &= z|z\rangle.\end{aligned}\tag{8.3.3}$$

2. Předpokládejme, že existuje vlastní stav operátoru $\hat{a}^\dagger$ s vlastní hodnotou λ

$$\hat{a}^\dagger |\psi(z)\rangle = \lambda |\psi(z)\rangle,\tag{8.3.4}$$

který lze vyjádřit v bázi $|n\rangle$ jako rozvoj

$$|\psi(z)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{z^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle.\tag{8.3.5}$$

Působení $\hat{a}^\dagger$ na tento vztah dá

$$\hat{a}^\dagger |\psi(z)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{z^n}{(n+1)!} |n+1\rangle,\tag{8.3.6}$$

takže v rozvoji (8.3.5) musí být $a_0 = 0$. Pokračujeme-li indukcí dál, dostaneme, že $a_n = 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$. Vlastní stav $|\psi(z)\rangle$ tedy neexistuje.

3. Využijte se BCH formule ve tvaru

$$e^{\hat{A}+\hat{B}} = e^{-\frac{1}{2}[\hat{A},\hat{B}]} e^{\hat{A}} e^{\hat{B}},\tag{8.3.7}$$

která platí za předpokladu

$$[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] = [\hat{B}, [\hat{A}, \hat{B}]] = 0.\tag{8.3.8}$$

Dosazení $\hat{A} = z\hat{a}^\dagger$, $\hat{B} = -z^*\hat{a}$ (komutační relace (8.3.8) jsou splněny, jelikož $[z\hat{a}^\dagger, -z^*\hat{a}] = zz^* = |z|^2$ je c -číslo) dá

$$e^{z\hat{a}^\dagger - z^*\hat{a}} = e^{-\frac{|z|^2}{2}} e^{z\hat{a}^\dagger} e^{z^*\hat{a}}.\tag{8.3.9}$$

Jelikož $\hat{a}|0\rangle = 0$, je také

$$e^{-z^*\hat{a}}|0\rangle = 0\tag{8.3.10}$$

a díky vztahu (4.1.3) je také

$$\begin{aligned}e^{z\hat{a}^\dagger - z^*\hat{a}}|0\rangle &= e^{-\frac{|z|^2}{2}} e^{z\hat{a}^\dagger}|0\rangle \\ &= e^{-\frac{|z|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \hat{a}^{\dagger n}|0\rangle \\ &= e^{-\frac{|z|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \sqrt{n!}|n\rangle \\ &= |z\rangle.\end{aligned}\tag{8.3.11}$$

8.4 Střední hodnoty operátorů

1. Nalezněte střední hodnotu energie harmonického oscilátoru ve stavu $|z\rangle$ a porovnejte s výsledkem (8.2.12).
2. Určete střední hodnoty operátorů polohy a hybnosti

$$\langle \hat{x} \rangle_z \equiv \langle z | \hat{x} | z \rangle, \quad \langle \hat{p} \rangle_z \equiv \langle z | \hat{p} | z \rangle \quad (8.4.1)$$

a vyjádřete pomocí nich číslo z .

3. Určete střední kvadratickou odchylku operátorů souřadnice a hybnosti

$$(\Delta \hat{x})^2 \equiv \langle z | (\hat{x} - \langle \hat{x} \rangle_z)^2 | z \rangle, \quad (\Delta \hat{p})^2 \equiv \langle z | (\hat{p} - \langle \hat{p} \rangle_z)^2 | z \rangle \quad (8.4.2)$$

a pomocí nich ukažte, že koherentní stavy minimalizují relace neurčitosti.

Řešení:

1. Vyjdeme z vyjádření Hamiltoniánu harmonického oscilátoru pomocí posunovacích operátorů (4.2.12). Díky vztahu (8.3.1) pak je

$$\langle z | \hat{H} | z \rangle = \langle z | \hbar \Omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) | z \rangle = \hbar \Omega \left(|z|^2 + \frac{1}{2} \right), \quad (8.4.3)$$

což se rovná dříve obdrženému výsledku (8.2.12).

2. Využijeme vztah mezi souřadnicí a posunovacími operátory (4.2.17)²⁰:

$$\begin{aligned} \langle z | \hat{x} | z \rangle &= e^{-|z|^2} \sum_{n,n'=0}^{\infty} \frac{z^{*n}}{\sqrt{n!}} \frac{z^{n'}}{\sqrt{n'!}} \underbrace{\langle n' | \hat{x} | n \rangle}_{\sqrt{\frac{\hbar}{2M\Omega}} (\sqrt{n+1} \delta_{n',n+1} + \sqrt{n} \delta_{n',n-1})} \\ &= e^{-|z|^2} \sqrt{\frac{\hbar}{2M\Omega}} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{*n} z^{n+1}}{\sqrt{n!} (n+1)!} \sqrt{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{*n} z^{n-1}}{\sqrt{n!} (n-1)!} \sqrt{n} \right] \\ &= e^{-|z|^2} \sqrt{\frac{\hbar}{2M\Omega}} \left[z e^{|z|^2} + z^* e^{|z|^2} \right] \\ &= \sqrt{\frac{2\hbar}{M\Omega}} \operatorname{Re} z. \end{aligned} \quad (8.4.5)$$

Podobně vztah mezi hybností a posunovacími operátory vede na

$$\langle z | \hat{p} | z \rangle = \sqrt{2\hbar M\Omega} \operatorname{Im} z. \quad (8.4.6)$$

Číslo z lze tedy vyjádřit jako

$$z = \sqrt{\frac{M\Omega}{2\hbar}} \left(\langle \hat{x} \rangle_z + \frac{i}{M\Omega} \langle \hat{p} \rangle_z \right). \quad (8.4.7)$$

Reálná část čísla z udává střední hodnotu *souřadnice*, imaginární část z střední hodnotu *hybnosti*.

²⁰Místo následujícího explicitního výpočtu lze využít i jednodušší postup pomocí (8.3.1):

$$\langle z | \hat{a} | z \rangle = z, \quad \langle z | \hat{a}^\dagger | z \rangle = (\langle z | \hat{a} | z \rangle)^* = z^*. \quad (8.4.4)$$

3. Kvadrát operátoru souřadnice je díky (4.2.17)

$$\begin{aligned}\hat{x}^2 &= \frac{\hbar}{2M\Omega} (\hat{a}^2 + \hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}^{\dagger 2}) \\ &= \frac{\hbar}{2M\Omega} (\hat{a}^2 + 2\hat{a}^\dagger\hat{a} + 1 + \hat{a}^{\dagger 2})\end{aligned}\quad (8.4.8)$$

(využili jsme komutační relace $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$). Na základě vztahů analogických k (8.4.4) je příslušná střední hodnota tohoto operátoru

$$\langle z|\hat{x}^2|z\rangle = \frac{\hbar}{2M\Omega} (z^2 + 2|z|^2 + 1 + z^{*2}). \quad (8.4.9)$$

Střední kvadratická odchylka tedy vychází

$$(\Delta\hat{x})^2 = \frac{\hbar}{2M\Omega} (z^2 + 2|z|^2 + 1 + z^{*2} - z^2 - 2|z|^2 - z^{*2}) = \frac{\hbar}{2M\Omega} \quad (8.4.10)$$

a podobně pro hybnosti

$$(\Delta\hat{p})^2 = \frac{\hbar M\Omega}{2}. \quad (8.4.11)$$

Relace neurčitosti pro koherentní stav tedy zní

$$(\Delta\hat{x})^2(\Delta\hat{p})^2 = \frac{\hbar^2}{4}, \quad (8.4.12)$$

což je minimální hodnota, kterou může neurčitost mezi polohou a hybností nabývat.

8.5 Časový vývoj

1. Nalezněte vyjádření koherentního stavu v čase t , tj.

$$|z(t)\rangle = \hat{U}(t) |z\rangle, \quad (8.5.1)$$

kde $\hat{U}(t)$ je operátor časového vývoje.

2. Určete střední hodnoty operátorů polohy a hybnosti v čase t

$$\langle \hat{x}(t) \rangle_z \equiv \langle z(t)|\hat{x}|z(t)\rangle, \quad \langle \hat{p}(t) \rangle_z \equiv \langle z(t)|\hat{p}|z(t)\rangle. \quad (8.5.2)$$

Ukažte, že časový vývoj koherentního stavu lze znázornit jako elipsu v grafu, kde na osy vynášíme $\langle \hat{x}(t) \rangle_z$ proti $\langle \hat{p}(t) \rangle_z$, konzistentně s klasickou teorií.

3. Nalezněte podmínku pro hodnotu z , za které bude elipsa v klasickém případě a v kvantovém případě pro střední hodnoty stejná.

Řešení:

1. Evoluční operátor je dán výrazem

$$\hat{U}(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t} = e^{-i\Omega t(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2})}. \quad (8.5.3)$$

Jeho působení na koherentní stav vede na

$$\begin{aligned}|z(t)\rangle &= e^{-\frac{|z|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} e^{-i\Omega t(n+\frac{1}{2})} |n\rangle \\ &= e^{-\frac{|z|^2}{2} - \frac{i\Omega t}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z e^{-i\Omega t})^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \\ &= e^{-\frac{i\Omega t}{2}} |z e^{-i\Omega t}\rangle.\end{aligned}\quad (8.5.4)$$

Časový vývoj je tedy až na fázi dán periodickou oscilací čísla z s frekvencí Ω ,

$$z(t) = z e^{-i\Omega t} . \quad (8.5.5)$$

Jak víme z předchozího příkladu, reálná a imaginární část čísla z udávají střední hodnotu polohy a hybnosti (8.4.7). Tyto střední hodnoty se tedy budou měnit v čase, jak se také explicitně ukáže v následující části úlohy.

2. Díky vyjádření komplexního čísla z pomocí rozkladu na velikost a fázi (8.2.2) lze časový vývoj středních hodnot zapsat ve tvaru

$$\langle \hat{x}(t) \rangle_z = \sqrt{\frac{2\hbar}{M\Omega}} \operatorname{Re} z(t) = \sqrt{\frac{2\hbar}{M\Omega}} |z| \cos [\phi(0) - \Omega t], \quad (8.5.6a)$$

$$\langle \hat{p}(t) \rangle_z = \sqrt{2\hbar M\Omega} \operatorname{Im} z(t) = \sqrt{2\hbar M\Omega} |z| \sin [\phi(0) - \Omega t], \quad (8.5.6b)$$

To se dá přepsat jako

$$\frac{\langle \hat{x}(t) \rangle_z^2}{A_q^2} + \frac{\langle \hat{p}(t) \rangle_z^2}{B_q^2} = 1, \quad (8.5.7)$$

což je rovnice elipsy s poloosami

$$A_q = \sqrt{\frac{2\hbar}{M\Omega}} |z|, \quad (8.5.8a)$$

$$B_q = \sqrt{2\hbar M\Omega} |z|. \quad (8.5.8b)$$

3. V klasickém případě máme

$$E = \frac{1}{2M} p^2 + \frac{1}{2} M \Omega^2 x^2, \quad (8.5.9)$$

takže

$$\frac{x^2}{A_c^2} + \frac{p^2}{B_c^2} = 1, \quad (8.5.10)$$

kde

$$A_c = \sqrt{\frac{2E}{M\Omega^2}}, \quad (8.5.11a)$$

$$B_c = \sqrt{2ME}.$$

Střední hodnota energie v kvantovém případě popsaném koherentním stavem $|z\rangle$ je (8.2.12). Pro velké hodnoty z lze zanedbat faktor $1/2$ a přibližně tedy platí

$$\langle E \rangle_z \approx \hbar \Omega |z|^2. \quad (8.5.12)$$

Čím větší je hodnota z , tím lépe bude koherentní stav odpovídat pohybu klasické částice o stejné energii.