

**Domácí úkol – Ramseyův přístroj pro spin 1** (termín odevzdání: 8.12.2021, 9.12.2021)

Částice se spinem 1 a velikostí magnetického momentu  $\mu$ , popsaná vlnovou funkcí

$$|\psi(t)\rangle = \psi_{+1}(t) | +1\rangle + \psi_0(t) | 0\rangle + \psi_{-1}(t) | -1\rangle = \begin{pmatrix} \psi_{+1}(t) \\ \psi_0(t) \\ \psi_{-1}(t) \end{pmatrix},$$

kde dolní index určuje projekci spinu na osu  $z$ , se pohybuje v zařízení složeném ze tří oblastí. V první oblasti (1. Ramseyova oblast) je zapnuté magnetické pole složené ze stacionární složky  $\mathbf{B}_0$  směřující podél osy  $z$  a rotující složky  $\mathbf{B}_1(t)$  v rovině  $(x, y)$ ,

$$\mathbf{B}_0 = (0, 0, B_0), \quad \mathbf{B}_1(t) = (B_1 \cos \omega t, -B_1 \sin \omega t, 0),$$

a částice v ní stráví dobu  $\tau$ . V druhé oblasti je rotující pole vypnuto a po dobu  $T$  se částice pohybuje pouze ve stacionárním poli  $\mathbf{B}_0$ . Poté (2. Ramseyova oblast) je rotující pole zapnuto, a to opět na dobu  $\tau$ .

1. Matice generující rotace částice se spinem 1 jsou  $\mathbf{S}_j^{(1)} = \hbar \mathbf{s}_j$ , kde

$$\mathbf{s}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{s}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{s}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ukažte, že tyto matice splňují komutační relace pro moment hybnosti

$$[\mathbf{s}_j, \mathbf{s}_k] = i\epsilon_{jkl} \mathbf{s}_l.$$

(Matice  $\mathbf{s}_j$  jsou analogické k Pauliho maticím  $\sigma_j$  popisujícím částici se spinem 1/2 a tvoří generátory třírozměrné ireducibilní reprezentace grupy SU(2).)

2. Dokažte, že pro matice  $\mathbf{s}_j$  platí  $\mathbf{s}_j^{n+2} = \mathbf{s}_j^n$ , kde  $n \in \mathbb{N}$ , a na základě tohoto vztahu vyjádřete exponenciálu

$$e^{i\phi(\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{s})} = ?$$

kde  $\hat{\mathbf{n}}$  je jednotkový vektor určující osu rotace, okolo které se systém otočí o úhel  $\phi$ , a

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{s} \equiv \hat{n}_1 \mathbf{s}_1 + \hat{n}_2 \mathbf{s}_2 + \hat{n}_3 \mathbf{s}_3.$$

3. Vyjádřete složky evolučního operátoru

$$\mathbf{U}(t) = e^{i\omega t \mathbf{s}_3} e^{-i\Omega t (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{s})},$$

kde

$$\Omega = \sqrt{(\omega - \omega_0)^2 + \omega_1^2}, \quad \hat{\mathbf{n}}_\Omega = \frac{1}{\Omega} \begin{pmatrix} -\omega_1 \\ 0 \\ \omega - \omega_0 \end{pmatrix}, \quad \omega_{0,1} = \frac{2\mu}{\hbar} B_{0,1}.$$

4. Vyjádřete složky evolučního operátoru  $\mathbf{U}(t; t_0)$ , který vyvíjí systém z času  $t_0$  do času  $t$ .  
 5. Vyjádřete složky evolučního operátoru  $\mathbf{U}_0(\tau + T; \tau)$  oblasti, kde je vypnuté pole  $\mathbf{B}_1$ .  
 6. Proces průchodu zařízením složeným z dvou Ramseyových oblastí s mezioblastí s vypnutým polem  $\mathbf{B}_1$  je dán evolučním operátorem

$$\mathbf{U}_F = \mathbf{U}(2\tau + T; \tau + T) \mathbf{U}_0(\tau + T; \tau) \mathbf{U}(\tau; 0).$$

Vyjádřete složky evolučního operátoru  $\mathbf{U}_F^{\text{rez}}$  pro speciální případ  $\omega = \omega_0$  (frekvence oscilujícího magnetického pole  $\mathbf{B}_1$  je v rezonanci s Larmorovou frekvencí  $\omega_0$ ).

7. Vypočítejte matici  $\mathbf{p}^{\text{rez}}$  se složkami  $p_{fi}^{\text{rez}}$ , které udávají pravděpodobnosti, že systém připravený na před vstupem do přístroje ve stavu s projekcí spinu na osu  $z$  rovnou  $i \in \{+1, 0, -1\}$ , naměříme po průchodu zařízením ve stavu s projekcí spinu  $f \in \{+1, 0, -1\}$ .