

## 9 Měření

### 9.1 Ramseyův přístroj s měřením

Tento příklad navazuje na příklad 8.2.

Předpokládejme, že na oblasti s vypnutým oscilujícím polem  $B_1$  provedeme měření pomocí dvouhladinového systému (například pomocí další částice se spinem 1/2). Namísto Hamiltoniánu

$$H_0 = -\mu\sigma_3 B_0 \quad (9.1.1)$$

budeme uvažovat Hamiltonián

$$H'_0 = \begin{cases} -\mu B_0 \sigma_3 \otimes (1 + \lambda m), & \tau \leq t < \tau + T_0, \\ -\mu B_0 \sigma_3 \otimes 1, & \tau + T_0 \leq t < \tau + T, \end{cases} \quad (9.1.2)$$

kde

$$m \equiv \frac{1}{2}(1 - \sigma_1) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (9.1.3)$$

Tento Hamiltonián působí na Hilbertově prostoru  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_s \otimes \mathcal{H}_m$ , což je tenzorový součin Hilbertova prostoru  $\mathcal{H}_s$  spinu prolétajícího Ramseyovým přístrojem a Hilbertova prostoru  $\mathcal{H}_m$  měřícího dvouhladinového systému.

Dobu  $T_0$  zvolíme speciálně jako (při využití notace (11.1.4) zimního semestru)

$$T_0 = \frac{\hbar\pi}{2\mu B_0 \lambda} = \frac{\pi}{\omega_0 \lambda}, \quad (9.1.4)$$

což, jak se ukáže během řešení, je doba potřebná k tomu, aby na sebe měřící zařízení přijalo kvantovou informaci o směru prolétávajícího spinu.

1. Nalezněte evoluční operátor  $U'_0(T)$  v oblasti mezi dvěma Ramseyovými zónami.
2. Za počáteční stav měřícího zařízení budeme uvažovat

$$|\phi_i\rangle = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 - i \\ 1 + i \end{pmatrix}. \quad (9.1.5)$$

V případě, že by měřící zařízení byl spin 1/2, ukažte, do jakého směru by mířil.

3. Ukažte, že pro počáteční stav ve tvaru

$$|\psi'_i\rangle = |\psi_i\rangle \otimes |\phi_i\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 - i \\ 1 + i \end{pmatrix} \quad (9.1.6)$$

lze pravděpodobnost naměření koncového stavu, ve kterém je spin, který prolétl Ramseyovým zařízením otočený dolů bez ohledu na to, jaký je stav měřícího zařízení, vyjádřit jako

$$p_{\downarrow\uparrow} = |A_{\downarrow\uparrow\uparrow}|^2 + |A_{\downarrow\downarrow\uparrow}|^2, \quad (9.1.7)$$

kde  $A_{\downarrow\uparrow\uparrow}$  a  $A_{\downarrow\downarrow\uparrow}$  jsou definovány ve výrazu (8.2.23). Měřením tedy vymizí interferenční člen.

## Řešení:

1. Evoluční operátor pro část Hamiltoniánu

$$h \equiv - \underbrace{\mu B_0}_{\frac{\hbar \omega_0}{2}} \lambda \sigma_3 \otimes m \quad (9.1.8)$$

se spočítá rozvinutím do řady:

$$u \equiv e^{-\frac{i}{\hbar} h T_0} = \sum_{j=0}^{\infty} \underbrace{\left( \frac{i \omega_0 \lambda T_0}{2} \right)^j}_{a} \frac{1}{j!} (\sigma_3 \otimes m)^j. \quad (9.1.9)$$

Jelikož

$$\sigma_3^2 = 1, \quad (9.1.10)$$

$$m^2 = m, \quad (9.1.11)$$

vychází

$$\begin{aligned} u &= 1 + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a^{2j+1}}{(2j+1)!} \sigma_3 \otimes m + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a^{2j}}{(2j)!} 1 \otimes m \\ &= 1 \otimes 1 + \left[ i \sigma_3 \sin \frac{\omega_0 \lambda T_0}{2} + 1 \left( \cos \frac{\omega_0 \lambda T_0}{2} - 1 \right) \right] \otimes m. \end{aligned} \quad (9.1.12)$$

Speciální volba  $T_0$  podle (9.1.4) vede na

$$u = 1 \otimes 1 + (i \sigma_3 - 1) \otimes m. \quad (9.1.13)$$

Jelikož  $h$  komutuje s  $H_0 = -\mu B_0 \sigma_3 \otimes 1$ , lze psát

$$\begin{aligned} U'_0(T) &= e^{-\frac{i}{\hbar} H_0 T} e^{-\frac{i}{\hbar} h T} \\ &= \left[ \begin{pmatrix} e^{i \frac{\omega_0 T}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i \frac{\omega_0 T}{2}} \end{pmatrix} \otimes 1 \right] [1 \otimes 1 + (i \sigma_3 - 1) \otimes m] \\ &= \begin{pmatrix} e^{i \frac{\omega_0 T}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i \frac{\omega_0 T}{2}} \end{pmatrix} \otimes 1 - \begin{pmatrix} (1-i) e^{i \frac{\omega_0 T}{2}} & 0 \\ 0 & (1+i) e^{-i \frac{\omega_0 T}{2}} \end{pmatrix} \otimes m. \end{aligned} \quad (9.1.14)$$

2. Lze využít dvou postupů:

- V příkladu 2.1 bylo ukázáno, že normalizovaný vektor spinu orientovaného do směru jednotkového vektoru  $\hat{n} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$  popsaného pomocí sférických úhlů  $(\theta, \phi)$  je

$$|\hat{n}\rangle = \begin{pmatrix} e^{-i\phi} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}. \quad (9.1.15)$$

Poměr složek

$$z = e^{-i\phi} \cot \frac{\theta}{2} \quad (9.1.16)$$

tedy udává úhly  $(\theta, \phi)$  (stereografická projekce v [3]). V případě tohoto příkladu je

$$z = \frac{1-i}{1+i} = -i = (\cos \phi - i \sin \phi) \cot \frac{\theta}{2}, \quad (9.1.17)$$

takže  $\phi = \pi/2$  a  $\theta = 0$ . To odpovídá projekci spinu podél souřadné osy  $y$ .

- Druhý způsob výpočtu spočívá ve vyjádření matice hustoty spinového stavu

$$\rho_n = |n\rangle \langle n| = \frac{1}{2} (1 + \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \quad (9.1.18)$$

( $|\mathbf{n}| = 1$  pro čistý stav,  $|\mathbf{n}| < 1$  pro smíšený stav). V případě zadaného stavu je

$$\begin{aligned}\rho_{\phi_i} &= |\phi_i\rangle\langle\phi_i| = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1-i \\ 1+i \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+i & 1-i \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} (1 + \sigma_2),\end{aligned}\quad (9.1.19)$$

což opět udává orientaci spinu podél osy  $y$ .<sup>24</sup>

3. Koncový stav systému, který vyvíjí počáteční stav  $|\psi'_i\rangle$ , je

$$|\psi'_F\rangle \equiv |\psi'(T+2\tau)\rangle = \hat{U}'_F |\psi'_i\rangle, \quad (9.1.20)$$

kde

$$\hat{U}'_F \equiv \hat{U}(2\tau+T, \tau+T)\hat{U}'_0(T)\hat{U}(\tau, 0). \quad (9.1.21)$$

Hledaná pravděpodobnost je

$$P'_{\downarrow\uparrow} = \langle\psi'_F|\hat{P}|\psi'_F\rangle, \quad (9.1.22)$$

kde  $\hat{P}$  je projektor na koncový stav,

$$\hat{P} = |\psi_f\rangle\langle\psi_f| \otimes \hat{\mathbf{1}}_m = |\psi_f\rangle\langle\psi_f| \otimes (|\uparrow\rangle\langle\uparrow| + |\downarrow\rangle\langle\downarrow|) = |\downarrow\uparrow\rangle\langle\downarrow\uparrow| + |\downarrow\downarrow\rangle\langle\downarrow\downarrow|. \quad (9.1.23)$$

Pravděpodobnost se tedy dá rozepsat jako

$$\begin{aligned}P'_{\downarrow\uparrow} &= \langle\psi'_i|\hat{U}'_F{}^\dagger|\downarrow\uparrow\rangle\langle\downarrow\uparrow|\hat{U}'_F|\psi'_i\rangle + \langle\psi'_i|\hat{U}'_F{}^\dagger|\downarrow\downarrow\rangle\langle\downarrow\downarrow|\hat{U}'_F|\psi'_i\rangle \\ &= \langle\uparrow\otimes\hat{U}'_F{}^\dagger|\downarrow\uparrow\rangle\langle\downarrow\uparrow|\hat{U}'_F|\uparrow\otimes\rangle + \langle\uparrow\otimes\hat{U}'_F{}^\dagger|\downarrow\downarrow\rangle\langle\downarrow\downarrow|\hat{U}'_F|\uparrow\otimes\rangle \\ &= |A'_{\downarrow\uparrow}{}^\uparrow|^2 + |A'_{\downarrow\uparrow}{}^\downarrow|^2,\end{aligned}\quad (9.1.24)$$

kde horní index značí, jaký stav bude mít výsledný spin, a  $|\phi_i\rangle \equiv |\otimes\rangle$ . Analogicky s (8.2.23) lze jednotlivé amplitudy dále rozepsat jako

$$\begin{aligned}A'_{\downarrow\uparrow}{}^\uparrow &= \langle\downarrow\uparrow|\hat{U}'_F|\uparrow\otimes\rangle \\ &= \langle\downarrow\uparrow|\hat{U}(2\tau+T, \tau+T)(|\uparrow_s\rangle\langle\uparrow_s| + |\downarrow_s\rangle\langle\downarrow_s|) \otimes (|\uparrow_m\rangle\langle\uparrow_m| + |\downarrow_m\rangle\langle\downarrow_m|) \hat{U}'_0(T)\hat{U}(\tau, 0)|\uparrow\otimes\rangle \\ &= \langle\downarrow\uparrow|\hat{U}(2\tau+T, \tau+T)|\uparrow\uparrow\rangle \underbrace{\langle\uparrow\uparrow|\hat{U}'_0(T)\hat{U}(\tau, 0)|\uparrow\otimes\rangle}_0 + \langle\downarrow\uparrow|\hat{U}(2\tau+T, \tau+T)|\uparrow\downarrow\rangle \underbrace{\langle\uparrow\downarrow|\hat{U}'_0(T)\hat{U}(\tau, 0)|\uparrow\otimes\rangle}_0 \\ &\quad + \langle\downarrow\uparrow|\hat{U}(2\tau+T, \tau+T)|\downarrow\uparrow\rangle \underbrace{\langle\downarrow\uparrow|\hat{U}'_0(T)\hat{U}(\tau, 0)|\uparrow\otimes\rangle}_0 + \langle\downarrow\uparrow|\hat{U}(2\tau+T, \tau+T)|\downarrow\downarrow\rangle \underbrace{\langle\downarrow\downarrow|\hat{U}'_0(T)\hat{U}(\tau, 0)|\uparrow\otimes\rangle}_0 \\ &= A_{\downarrow\uparrow}^{(2)} A'_{\uparrow\uparrow}{}^{\uparrow(1)} + A_{\downarrow\downarrow}^{(2)} A'_{\downarrow\uparrow}{}^{\uparrow(1)},\end{aligned}\quad (9.1.25a)$$

$$A'_{\downarrow\uparrow}{}^\downarrow = A_{\downarrow\uparrow}^{(2)} A'_{\uparrow\uparrow}{}^{\downarrow(1)} + A_{\downarrow\downarrow}^{(2)} A'_{\downarrow\uparrow}{}^{\downarrow(1)}, \quad (9.1.25b)$$

kde vyznačené elementy jsou nulové díky ortogonalitě a díky tomu, že operátor  $\hat{U}$  nemění stav měřícího spinu, a  $A_{\downarrow\uparrow}^{(2)}, A_{\downarrow\downarrow}^{(2)}$  jsou dány vztahy (8.2.22).

<sup>24</sup>Platí tedy, že stav  $|\phi_i\rangle$  je vlastním stavem matice  $\sigma_2$ .

Využití vztahů (8.2.21) pro Ramseyův přístroj v první Ramseyově oblasti vede k amplitudám

$$\begin{aligned}
 A'_{\uparrow\uparrow}{}^{\uparrow(1)} &= [(1 \ 0) \otimes (1 \ 0)] U'_0(T) U(\tau; 0) \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes |\phi_i\rangle \right] \\
 &= \left[ \left( e^{i\frac{\omega_0 T}{2}} \ 0 \right) \otimes (1 \ 0) - (1-i) \left( e^{i\frac{\omega_0 T}{2}} \ 0 \right) \otimes \frac{1}{2} (1 \ -1) \right] U(\tau; 0) \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1-i \\ 1+i \end{pmatrix} \right] \\
 &= \left[ \left( e^{i\frac{\omega_0 T}{2}} \ 0 \right) \otimes \frac{1}{2} (1+i \ 1-i) \right] U(\tau; 0) \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1-i \\ 1+i \end{pmatrix} \right] \\
 &= A_{\uparrow\uparrow}^{(1)} \frac{1}{2} (1+i \ 1-i) \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1-i \\ 1+i \end{pmatrix} \\
 &= A_{\uparrow\uparrow}^{(1)},
 \end{aligned} \tag{9.1.26a}$$

$$\begin{aligned}
 A'_{\downarrow\uparrow}{}^{\uparrow(1)} &= [(0 \ 1) \otimes (1 \ 0)] U'_0(T) U(\tau; 0) \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes |\phi_i\rangle \right] \\
 &= A_{\downarrow\uparrow}^{(1)} \frac{1}{2} (1-i \ 1+i) \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1-i \\ 1+i \end{pmatrix} \\
 &= 0,
 \end{aligned} \tag{9.1.26b}$$

$$A'_{\uparrow\uparrow}{}^{\downarrow(1)} = 0, \tag{9.1.26c}$$

$$A'_{\downarrow\uparrow}{}^{\downarrow(1)} = A_{\downarrow\uparrow}^{(1)}, \tag{9.1.26d}$$

takže

$$A'_{\downarrow\uparrow}{}^{\uparrow} = A_{\downarrow\uparrow}^{(2)} A_{\uparrow\uparrow}^{(1)} = A_{\downarrow\uparrow\uparrow}, \tag{9.1.27a}$$

$$A'_{\downarrow\uparrow}{}^{\downarrow} = A_{\downarrow\downarrow}^{(2)} A_{\downarrow\uparrow}^{(1)} = A_{\downarrow\downarrow\uparrow}. \tag{9.1.27b}$$

Hledaná pravděpodobnost překlopení spinu je tedy podle (9.1.24)

$$p_{\downarrow\uparrow} = |A_{\downarrow\uparrow\uparrow}|^2 + |A_{\downarrow\downarrow\uparrow}|^2. \tag{9.1.28}$$

Začlenění měřícího přístroje tedy zničí interferenci. Vývoj je však unitární, kvantová informace se přenesla na měřící spin. Měřící spin se bude nacházet ve stavu  $|\uparrow\rangle$ , pokud se spin procházející přístrojem nachází za 1. Ramseyovou oblastí ve stavu  $|\uparrow\rangle$ , a obdobně pro spin mířící dolů.

Výpočet se dá provést i jinak. Jelikož stav měřícího spinu ovlivňuje pouze oblast bez oscilujícího

magnetického pole  $B_1$ , stačí určit

$$\begin{aligned}
U'_0(T) [1 \otimes |\phi_i\rangle] &= \begin{pmatrix} e^{i\frac{\omega_0 T}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\omega_0 T}{2}} \end{pmatrix} \otimes \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1-i \\ 1+i \end{pmatrix} \\
&\quad - \begin{pmatrix} (1-i) e^{i\frac{\omega_0 T}{2}} & 0 \\ 0 & (1+i) e^{-i\frac{\omega_0 T}{2}} \end{pmatrix} \otimes \underbrace{\left[ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1-i \\ 1+i \end{pmatrix} \right]}_{\frac{i}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}} \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{i\frac{\omega_0 T}{2}} \begin{pmatrix} 1-i \\ 1+i \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\omega_0 T}{2}} \begin{pmatrix} 1-i \\ 1+i \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\
&\quad - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (i+1) e^{i\frac{\omega_0 T}{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & (i-1) e^{-i\frac{\omega_0 T}{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} e^{i\frac{\omega_0 T}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\omega_0 T}{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} e^{i\frac{\omega_0 T}{2}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\omega_0 T}{2}} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Z tohoto výrazu již vyplývají výše uvedené výsledky.

**Poznámka:** Formálně jednodušší přístup je pomocí matice hustoty. Pokud se použije Ramseyův přístroj bez měřicího zařízení, vyvine se spin z počátečního stavu (8.2.6) do stavu

$$|\psi_F\rangle = |\psi_i(T_F)\rangle = (A_{\uparrow\uparrow\uparrow} + A_{\uparrow\downarrow\uparrow}) |\uparrow\rangle + (A_{\downarrow\uparrow\uparrow} + A_{\downarrow\downarrow\uparrow}) |\downarrow\rangle, \quad (9.1.29)$$

kde  $T_f \equiv 2\tau + T$ , takže matice hustoty bude

$$\begin{aligned}
\hat{\rho}_i(T_f) &= |\psi_i(T_f)\rangle \langle \psi_i(T_f)| \\
&= \begin{pmatrix} |A_{\uparrow\uparrow\uparrow} + A_{\uparrow\downarrow\uparrow}|^2 & (A_{\uparrow\uparrow\uparrow} + A_{\uparrow\downarrow\uparrow})(A_{\downarrow\uparrow\uparrow} + A_{\downarrow\downarrow\uparrow})^* \\ (A_{\uparrow\uparrow\uparrow} + A_{\uparrow\downarrow\uparrow})^* (A_{\downarrow\uparrow\uparrow} + A_{\downarrow\downarrow\uparrow}) & |A_{\downarrow\uparrow\uparrow} + A_{\downarrow\downarrow\uparrow}|^2 \end{pmatrix} \quad (9.1.30)
\end{aligned}$$

a pravděpodobnost naměření stavu  $|\psi_f\rangle$  (8.2.7) je

$$p_{\downarrow\uparrow} = \langle \psi_f | \hat{\rho}_i(T_f) | \psi_f \rangle = |A_{\downarrow\uparrow\uparrow} + A_{\downarrow\downarrow\uparrow}|^2, \quad (9.1.31)$$

což je výsledek (8.2.24).

Při zapnutí měřicího přístroje je koncový stav

$$\begin{aligned}
|\psi_i(T_f)\rangle &= A_{\uparrow\uparrow\uparrow} |\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle + A_{\uparrow\downarrow\uparrow} |\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle \\
&\quad + A_{\downarrow\uparrow\uparrow} |\downarrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle + A_{\downarrow\downarrow\uparrow} |\downarrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle. \quad (9.1.32)
\end{aligned}$$

Matice hustoty se zapnutým měřicím přístrojem má tedy složky

$$\rho'_{ab,cd}(T_f) = A_{ab\uparrow} A_{cd\uparrow}^*, \quad (9.1.33)$$

kde první index  $a, c \in \{\uparrow, \downarrow\}$  odpovídá stavu spinu, druhý index  $b, d \in \{\uparrow, \downarrow\}$  měřicímu přístroji.

V koncovém stavu nás nezajímá stav měřicího přístroje, což formálně znamená, že všichni infor-

maci nese parciální stopa matice hustoty přes  $\mathcal{H}_m$ :

$$\begin{aligned}
 \hat{\rho}'_s(T_F) &= \text{Tr}_m \hat{\rho}'(T_F) \\
 &= \langle \uparrow_m | \hat{\rho}'(T_F) | \uparrow_m \rangle + \langle \downarrow_m | \hat{\rho}'(T_F) | \downarrow_m \rangle \\
 &= \begin{pmatrix} \rho'_{\uparrow\uparrow,\uparrow\uparrow}(T_F) + \rho'_{\uparrow\downarrow,\uparrow\downarrow}(T_F) & \rho'_{\uparrow\uparrow,\downarrow\uparrow}(T_F) + \rho'_{\uparrow\downarrow,\downarrow\downarrow}(T_F) \\ \rho'_{\downarrow\uparrow,\uparrow\uparrow}(T_F) + \rho'_{\downarrow\downarrow,\uparrow\downarrow}(T_F) & \rho'_{\downarrow\uparrow,\downarrow\uparrow}(T_F) + \rho'_{\downarrow\downarrow,\downarrow\downarrow}(T_F) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} |A_{\uparrow\uparrow\uparrow}|^2 + |A_{\uparrow\downarrow\uparrow}|^2 & A_{\uparrow\uparrow\uparrow}A_{\downarrow\uparrow\uparrow}^* + A_{\uparrow\downarrow\uparrow}A_{\downarrow\downarrow\uparrow}^* \\ A_{\downarrow\uparrow\uparrow}A_{\uparrow\uparrow\uparrow}^* + A_{\downarrow\downarrow\uparrow}A_{\uparrow\downarrow\uparrow}^* & |A_{\downarrow\uparrow\uparrow}|^2 + |A_{\downarrow\downarrow\uparrow}|^2 \end{pmatrix} \quad (9.1.34)
 \end{aligned}$$

Hledaná pravděpodobnost je pak

$$p'_{\downarrow\uparrow} = \langle \downarrow_s | \rho'_s(T_F) | \downarrow_s \rangle = |A_{\downarrow\uparrow\uparrow}|^2 + |A_{\downarrow\downarrow\uparrow}|^2, \quad (9.1.35)$$

v souladu s (9.1.28).