1 Dvouhladinový systém s periodickou interakcí

Dvouhladinový systém je popsaný Hamiltoniánem

$$
\begin{aligned}
\hat{\mathsf{H}}(t) &= \hat{\mathsf{H}}_0 + \hat{\mathsf{H}}_\mathrm{I}(t), \\
\hat{\mathsf{H}}_0 &= \begin{pmatrix} E_1^{(0)} & 0 \\ 0 & E_2^{(0)} \end{pmatrix} \equiv E_1^{(0)} \left|\phi_1\right\rangle \left\langle\phi_1\right| + E_2^{(0)} \left|\phi_2\right\rangle \left\langle\phi_2\right|, \\
\hat{\mathsf{H}}_\mathrm{I}(t) &\equiv \Theta(t) \begin{pmatrix} 0 & \gamma\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \\ \gamma\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} & 0 \end{pmatrix} = \Theta(t) \left[\gamma\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \left|\phi_1\right\rangle \left\langle\phi_2\right| + \gamma\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \left|\phi_2\right\rangle \left\langle\phi_1\right|\right],
\end{aligned}
$$

přičemž operátor $\hat{\mathsf{H}}_\mathrm{I}(t)$ představuje periodickou interakci, která je zapnuta v čase $t_0 = 0$ (formálně zapsáno pomocí Heavisideovy skokové funkce Θ), γ je reálný parametr, který určuje sílu interakce, a $E_{1,2}^{(0)}$ jsou neporušené energie.

Před zapnutím interakce v čase $t \leq 0$ je systém ve stavu $\left|\phi_i\right\rangle \equiv \left|\phi_1\right\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

1. Spočítejte *neporuchově* pravděpodobnost $\mathcal{P}_{1\to 2}(t)$, že systém v čase v čase $t > 0$ přejde do stavu $\left|\phi_2\right\rangle$. Vzorec, který dostanete, se nazývá *Rabiho formule*.

   Nápověda: Pro řešení této části úlohy můžete využít výsledku pro časový vývoj spinu v harmonickém magnetickém poli, který jsme si odvodili v rámci cvičení zimního semestru.

2. Předpokládejte nyní, že interakce je slabá, tj. $\gamma \ll \left|E_2^{(0)} - E_1^{(0)}\right|$, a řešte úlohu pomocí nestacionární poruchové teorie do druhého řádu v γ. Získanou pravděpodobnost srovnejte s přesným řešením. Za jaké podmínky přibližné řešení dobře aproximuje přesný výsledek?

3. Za jaké podmínky lze v čase $t > 0$ naměřit systém ve stavu $\left|\phi_2\right\rangle$ s pravděpodobností jedna?