A.5 Coulombické pole

WKB metodu lze aplikovat také na problémy se sféricky symetrickým polem. Schrödingerova rovnice pro radiální část vlnové funkce $R(r)$ obecného sféricky symetrického problému má tvar

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}r^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}R(r) + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E - V_{\mathrm{ef}}(r)\right)R(r) = 0, \tag{1.5.1}$$

kde

$$V_{\mathrm{ef}}(r) \equiv V(r) + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2} \tag{1.5.2}$$

je efektivní potenciál, zahrnující v sobě centrifugální člen.

Zavedením substituce $R(r) = u(r)/r$ dostaneme rovnici

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}u(r) + k^2(r)u(r) = 0, \tag{1.5.3}$$

kde $k^2(r) = 2m/\hbar^2(E - V_{\mathrm{ef}})$.

WKB metoda pro sféricky symetrické potenciály dává dobré výsledky jedině v případě, aplikujeme-li tzv. *Langerovu korekci*, která spočívá v nahrazení

$$\boxed{l(l+1) \longrightarrow (l+\frac{1}{2})^2} \tag{1.5.4}$$

(dá se odvodit z asymptotiky vlnových funkcí; původní práce Rudolpha E. Langera je v [12]). Vázané stavy lze pak nalézt z rovnice ekvivalentní Bohrově-Sommerfeldově kvantovací podmínce

$$\int_{r_1}^{r_2} k'(r)\mathrm{d}r = \left(n_{\mathrm{r}} + \frac{1}{2}\right)\pi, \tag{1.5.5}$$

přičemž $k'(r)$ zahrnuje Langerovu korekci, $n_{\mathrm{r}} = 0, 1, \ldots$ je radiální kvantové číslo a $r_{1,2}$ jsou body obratu klasické trajektorie s hybností $p'(r) = \hbar k'(r)$.

Uvažujte konkrétní případ pohybu částice v Coulombickém poli

$$V(r) = -\frac{\gamma}{r}. \tag{1.5.6}$$

kde $\gamma = e^2/(4\pi\epsilon_0)$.

1. Nalezněte body obratu $r_{1,2}$ trajektorie s energií E (počítejte s Langerovou korekcí).
2. Pomocí WKB přiblížení nalezněte spektrum, tj. stavy s energií $E < 0$.
3. Porovnejte toto spektrum se spektrem získaným přesným řešením Schrödingerovy rovnice.

Řešení:

Řešení formou hry naleznete na následujících odkazech: Linux, Windows.

A.6 Homogenní pole

Částice o hmotnosti M (hopík) skáče v homogenním (např. gravitačním) poli, přičemž od podložky se odráží bez ztráty energie. Potenciál se tedy dá vyjádřit jako

$$V(z) = \begin{cases} mgz & z > 0 \\ \infty & z < 0 \end{cases} \tag{1.6.1}$$

1. Řešení pomocí WKB metody:
   - Nalezněte body obratu, má-li částice energii E.
   - Pomocí WKB přiblížení vypočítejte energetické spektrum.

- Nalezněte WKB vlnové funkce v klasicky dostupné i nedostupné oblasti. Vlnové funkce nemusíte normovat.

2. Hledání základního stavu variační metodou:

   - Podle chování potenciálu navrhněte vhodnou testovací funkci s jedním parametrem (dodatečný parametr bude fixovat normalizaci).
   - Nalezněte optimální hodnotu parametru a jemu odpovídající přibližnou energii základního stavu.

3. Srovnáním energií základního stavu získaných oběma metodami určete, která metoda dává základní stav přesněji.