FYZIKÁLNÍ CHAOS A FRAKTÁLY

Pavel Stránský

www.pavelstransky.cz

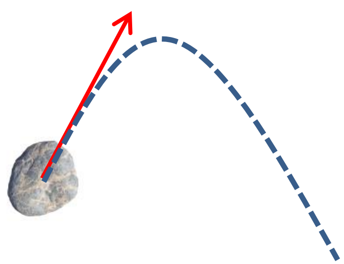
Gymnázium Brandýs nad Labem

15. února 2016

Co si odnášíme z hodin fyziky:

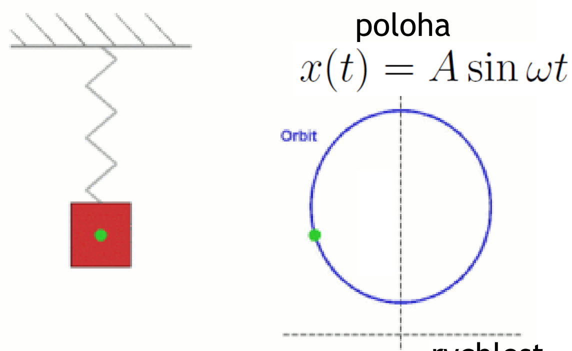
Pohyb je pravidelný / periodický / uspořádaný a většinou předepsaný vzorečkem:

vržený kámen



parabola

těleso na pružině



pohyb nebeských těles

obíhání po elipse kolem společného hmotného středu

nebo

Systém je složený z velmi mnoha částí (například plyn složený z molekul), o jejichž samostatný pohyb se nezajímáme a předpokládáme, že je neuspořádaný – **termodynamika** (teplota, tlak)

...fyzika je jednoduchá, budoucnost předpověditelná.

Determinismus v klasické fyzice

Pierre-Simon Laplace (1814):

Une intelligence qui, à un instant donné, connaîtrait toutes les forces dont la nature est animée et la situation respective des êtres qui la composent, si d'ailleurs elle était suffisamment vaste pour soumettre ces données à l'analyse, embrasserait dans la même formule les mouvements des plus grands corps de l'univers et ceux du plus léger atome ; rien ne serait incertain pour elle, et l'avenir, comme le passé, serait présent à ses yeux.

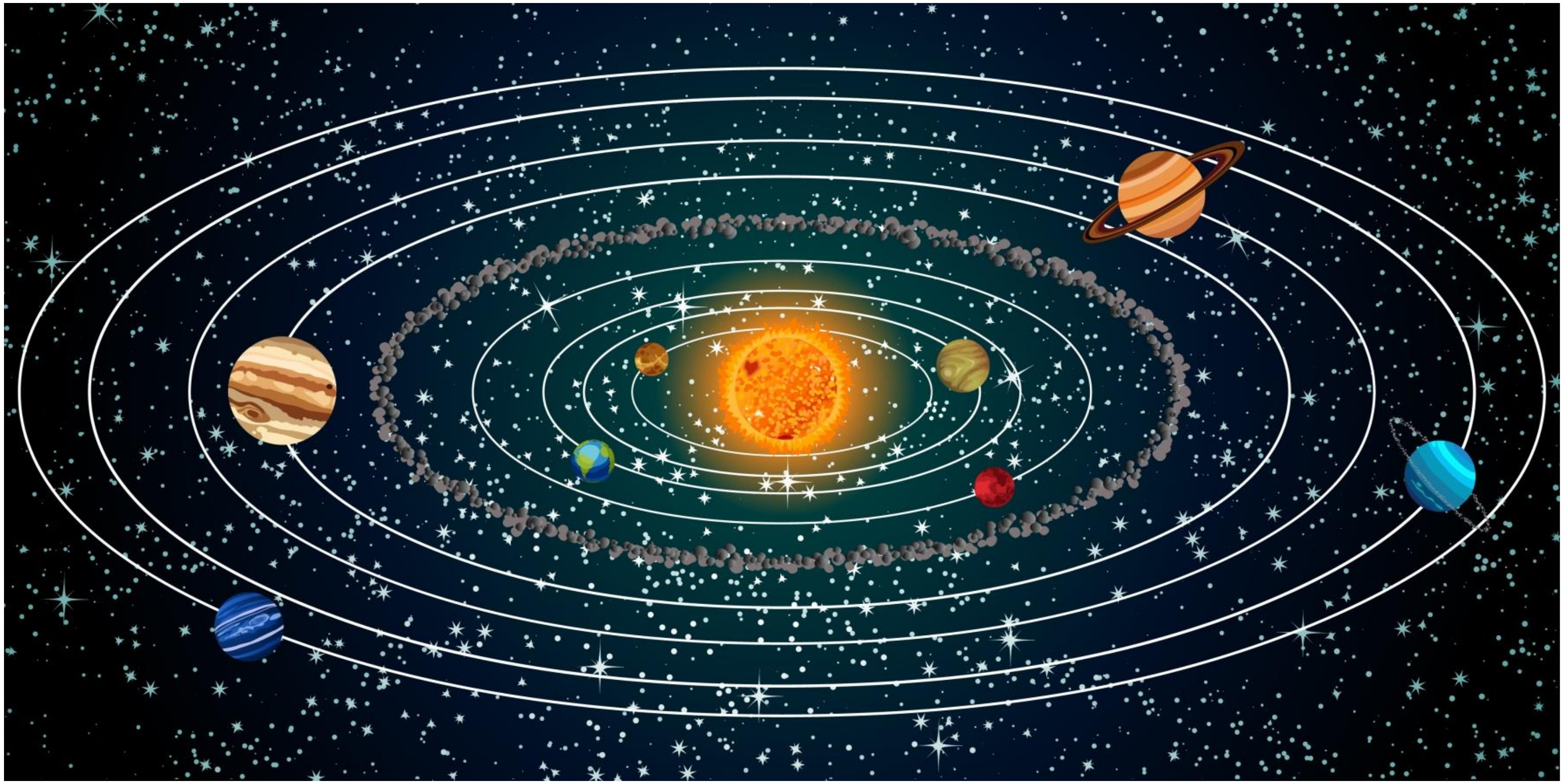
Pokud by nějaký intelekt (**Laplaceův démon**) znal v určitém okamžiku všechy síly, které uvedly přírodu do pohybu, a přesné polohy všech věcí, z nichž se příroda skládá, pak by v jediné formuli obsáhl pohyby těch největších těles ve vesmíru i nejmenších atomů. Pro takový intelekt by nic nebylo nejisté a před jeho očima by se zpřítomňovala budoucnost stejně jako minulost.

Budeme-li znát polohy a hybnosti jen přibližně, umožní nám to určit **přibližnou** minulost a **přibližnou** budoucnost?

Opravdu je budoucnost předpověditelná?

dvojné kyvadlo

Nebeská mechanika



Je sluneční soustava stabilní?

Historie: Problém více těles v nebeské mechanice

1887

- švédský a norský král Oscar II. Vyhlašuje u příležitosti svých 60. narozenin vědeckou soutěž s cílem nalezení obecného řešení systému mnoha těles v nebeské mechanice
- cena pro vítěze: *zlatá medaile a 2500 zlatých korun*

Soutěžní úloha:

Uvažujte soustavu libovolně mnoha hmotných bodů, které se navzájem přitahují podle Newtonova gravitačního zákona. Za předpokladu, že mezi hmotnými body nikdy nedojde ke srážce, zkuste naleznout souřadnice každého z nich ve tvaru *dobře se chovajících funkcí času*.

Historie: Problém více těles v nebeské mechanice

Henri Poincaré
(1854-1912)

1887

- švédský a norský král Oscar II. Vyhlašuje u příležitosti svých 60. narozenin vědeckou soutěž s cílem nalezení obecného řešení systému mnoha těles v nebeské mechanice
- cena pro vítěze: *zlatá medaile a 2500 zlatých korun*

1888

- do soutěže se přihlašuje **Henri Poincaré** prací nazvanou *O problému tří těles a rovnicích dynamiky*
- Karl Weierstrass, Charles Hermite, Gösta Mittag-Leffler jako porotci soutěže ho vyhlašují vítězem
- vítězná 160 stránková práce má být publikována, avšak editor upozorňuje Poincarého na určité nejasnosti
- po dlouhém mlčení Poincaré nachází fatální chybu a stahuje již vytištěné vydání práce

1890

- Poincaré publikuje na vlastní náklady (přesahující výhru 2500 korun) novou práci v rozsahu 270 stránek, v nichž odhaluje do té doby skrytou bohatost a složitost řešení pohybových rovnic klasické mechaniky a ukazuje jejich **nestabilitu**.

Historie: Problém více těles v nebeské mechanice

1887

- švédský a norský král Oscar II. Vyhlašuje u příležitosti svých 60. narozenin vědeckou soutěž s cílem nalezení obecného řešení systému mnoha těles v nebeské mechanice
- cena pro vítěze: *zlatá medaile a 2500 zlatých korun*

1888

- do soutěže se přihlašuje **Henri Poincaré** prací nazvanou *O problému tří těles a rovnicích dynamiky*

Henri Poincaré
(1854-1912)

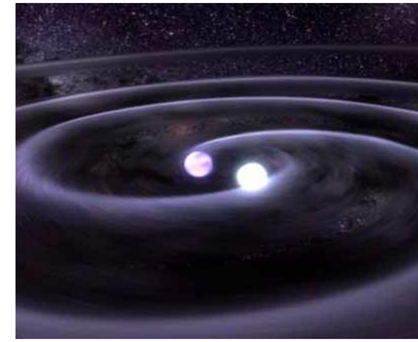
Práce pokládá základy pozdějšího studia chaosu
a komplexity ve fyzice i mimo ni.

- **Teorie chaosu**
- **Teorie relativity**
- **Kvantová mechanika**

tvoří pilíře moderní fyziky.

Poincaré publikuje na vlastní náklady (přesahující výhru 2500 korun) novou práci v rozsahu 270 stránek, v nichž odhaluje do té doby skrytou bohatost a složitost řešení pohybových rovnic klasické mechaniky a ukazuje jejich **nestabilitu**.

Dvě tělesa
(přitahující se gravitačně)



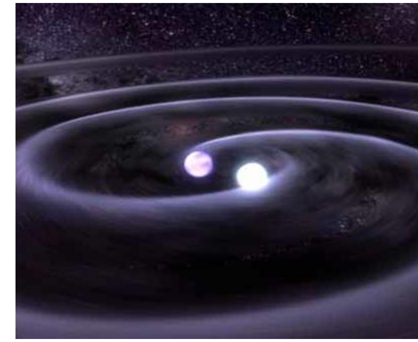
(stejná hmotnost těles)

zjednodušení:

- tělesa mají zanedbatelné rozměry
- tělesa nemají žádnou vnitřní strukturu

pravidelný **periodický** pohyb po elipsách (1609 - Johannes Kepler a jeho zákony)

Dvě tělesa
(přitahující se gravitačně)



(stejná hmotnost těles)

zjednodušení:

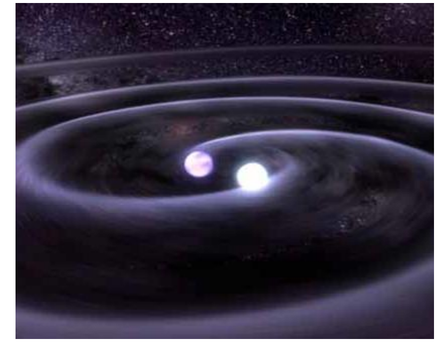
- tělesa mají zanedbatelné rozměry
- tělesa nemají žádnou vnitřní strukturu

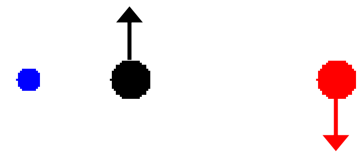
pravidelný **periodický** pohyb po elipsách (1609 - Johannes Kepler a jeho zákony)

Dvě tělesa

Tři tělesa

+





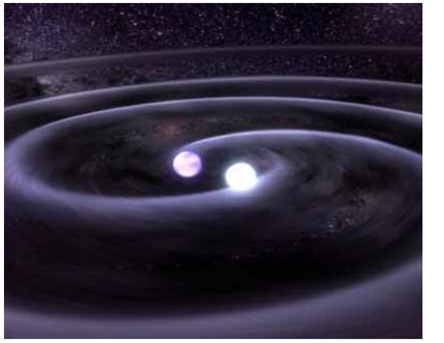
$$M = M = 5\ m$$

(zjednodušení: pohyb probíhá v jedné rovině)

Dvě tělesa

Tři tělesa

+



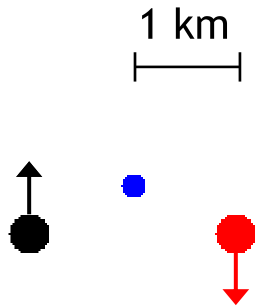
$$M = M = 5\ m$$

(zjednodušení: pohyb probíhá v jedné rovině)

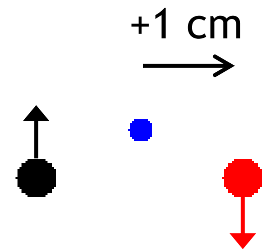
periodický stabilní pohyb

Tři tělesa

- nestabilní pohyb



modrá družice na počátku nepatrně posunuta

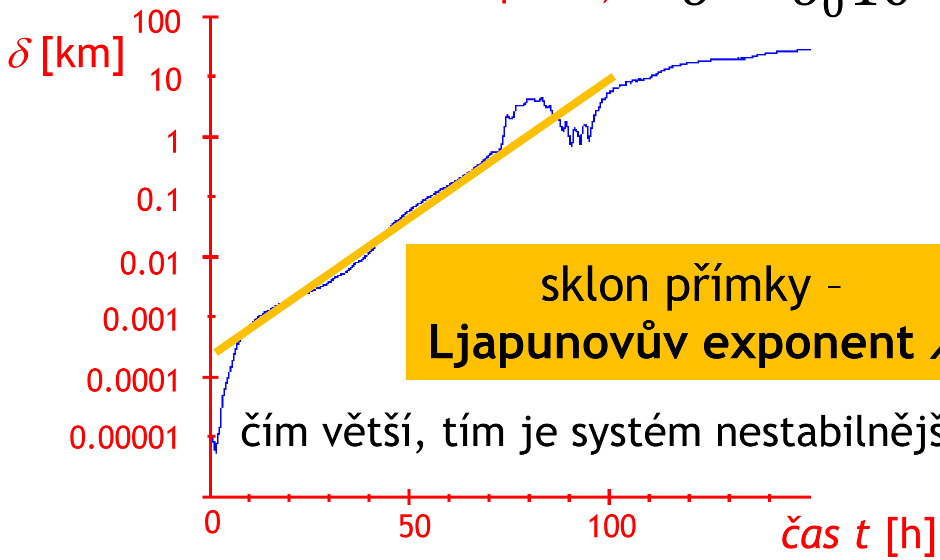


Tři tělesa

- nestabilní pohyb

vzdálenost mezi modrými družicemi
(obrázek nalevo - obrázek napravo)

$$\delta = \delta_0 10^{\lambda t}$$



sklon přímky –
Ljapunovův exponent λ

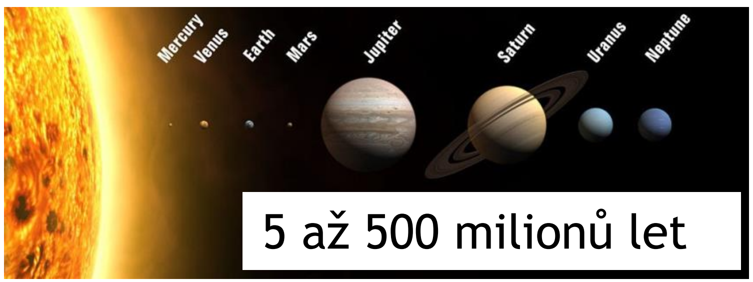
čím větší, tím je systém nestabilnější

Ljapunovův čas $\tau = \frac{1}{\lambda}$

- doba, za kterou se odchylka dvou blízkých drah zdesateronásobí
- udává **odhad**, na jak dlouhou dobu lze předpovědět budoucnost systému

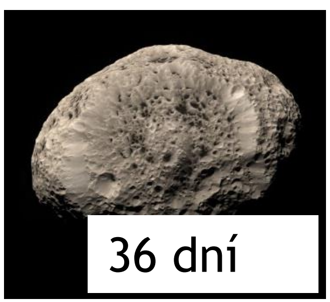
Příklady

Sluneční soustava:

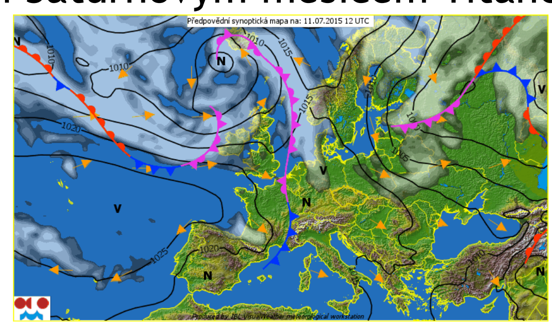


*J. Laskar a M. Gastineau: počítají budoucnost sluneční soustavy s 2501 různými počátečními podmínkami, přičemž vždy posune Merkur o 0.38mm. Dostávají **20 kolizních řešení** (Merkur se srazí s Venuší, spadne do Slunce, vychýlí Mars na kolizní dráhu se Zemí…)*

Hyperion (jeden z měsíců Saturnu):



- osa rotace se chaoticky mění v čase
- důsledek rezonance s dalším Saturnovým měsícem Titanem



Předpověď počasí: několik hodin až dnů

Wayne B. Hayes (2007) - *Is the outer Solar System chaotic?* (Nature Physics **3**, 689)
J. Laskar, M. Gastineau (2009) – Existence of collisional trajectories of Mercury, Mars and Venus with the Earth (Nature **459**, 817)

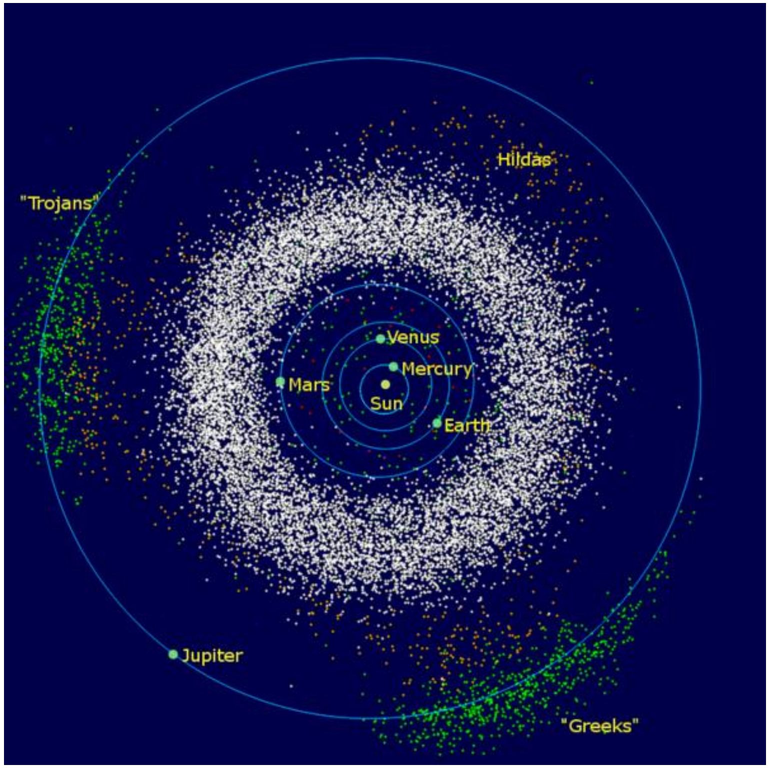
KAM teorém

(Andrej Kolmogorov, Vladimir Arnol’d, Jürgen Moser, 1960)

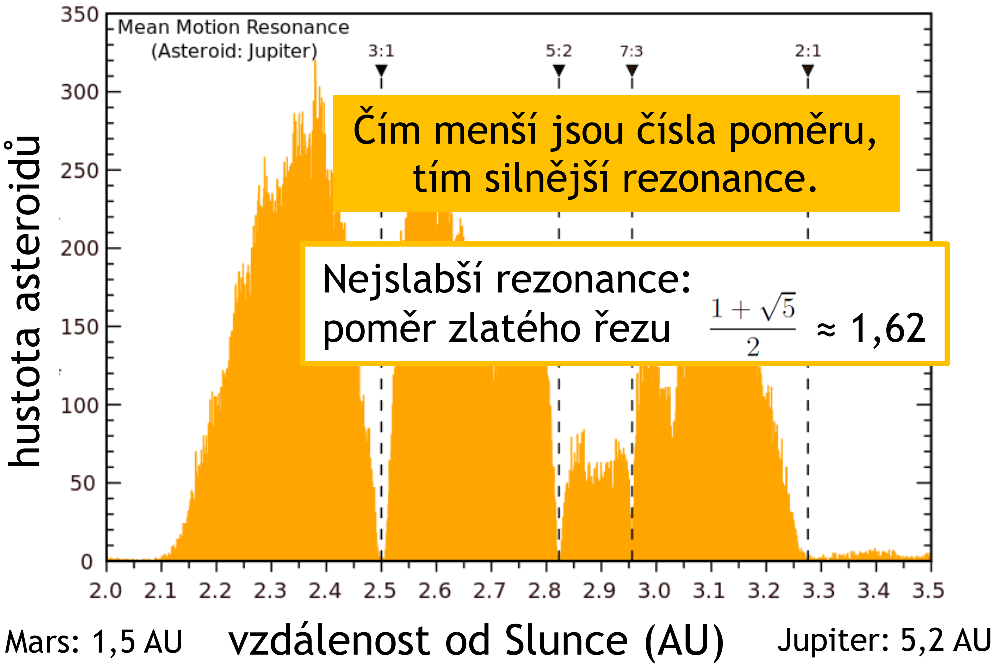
Chaotické chování je zapříčiněno **rezonancemi** –
přenosem energie mezi jednotlivými složkami systému

Mezery v hlavním pásu asteroidů

(D. Kirkwood 1874)



- zapříčiněny rezonancemi oběžných drah s Jupiterem

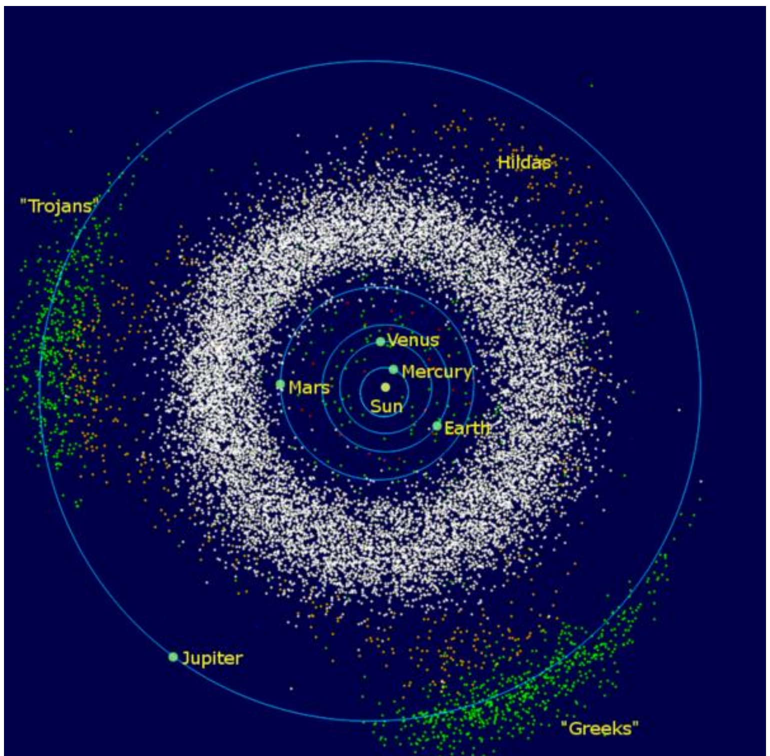


KAM teorém

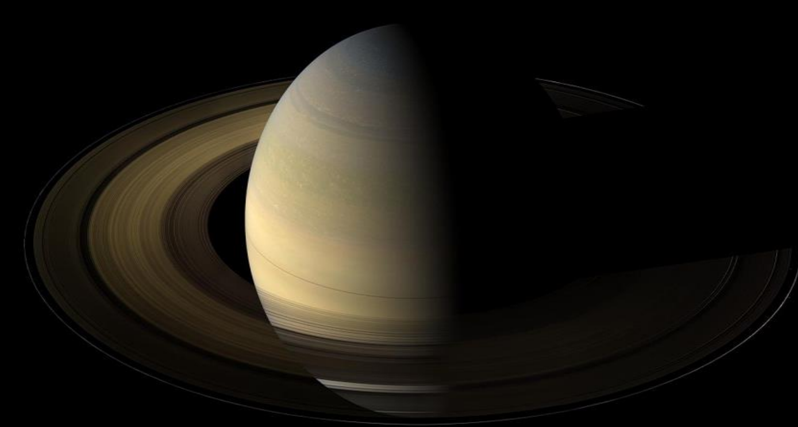
(Andrej Kolmogorov, Vladimir Arnol’d, Jürgen Moser, 1960)

Chaotické chování je zapříčiněno **rezonancemi** –
přenosem energie mezi jednotlivými složkami systému

Mezery v hlavním pásu asteroidů
(D. Kirkwood 1874)



Mezery v Saturnově prstenci



- důsledek rezonancí se Saturnovými měsíci

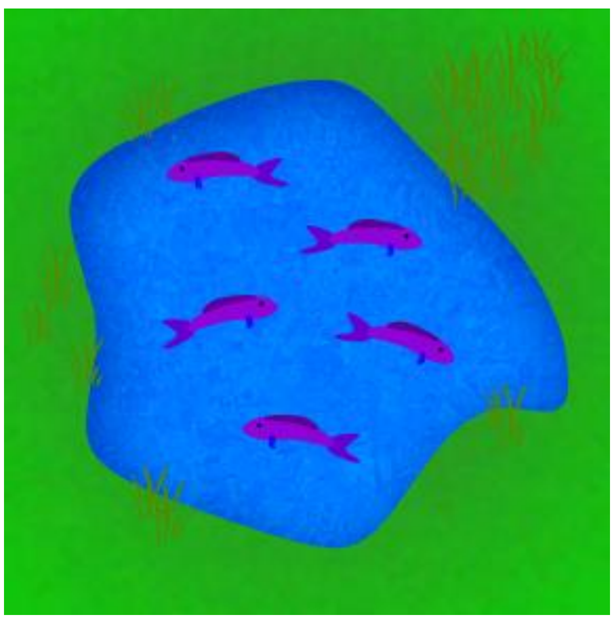
Logistické zobrazení

$$x_{n+1} = r x_n \_\_\_\_\_\_$$

populace (v roce *n*+1)

parametr růstu

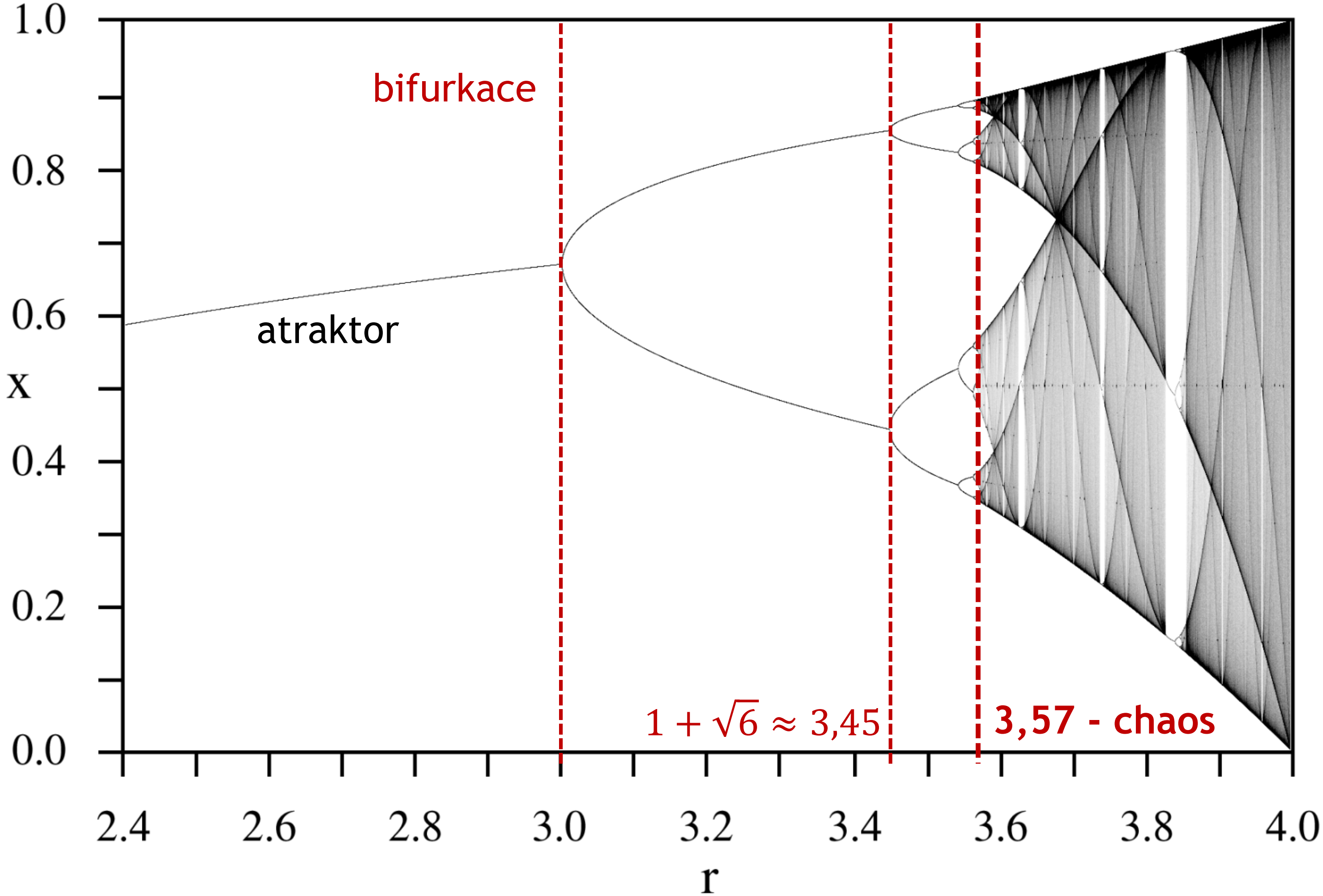
vymírání důsledkem přemnožení



https://www.wolframalpha.com/input/?i=logistic+system

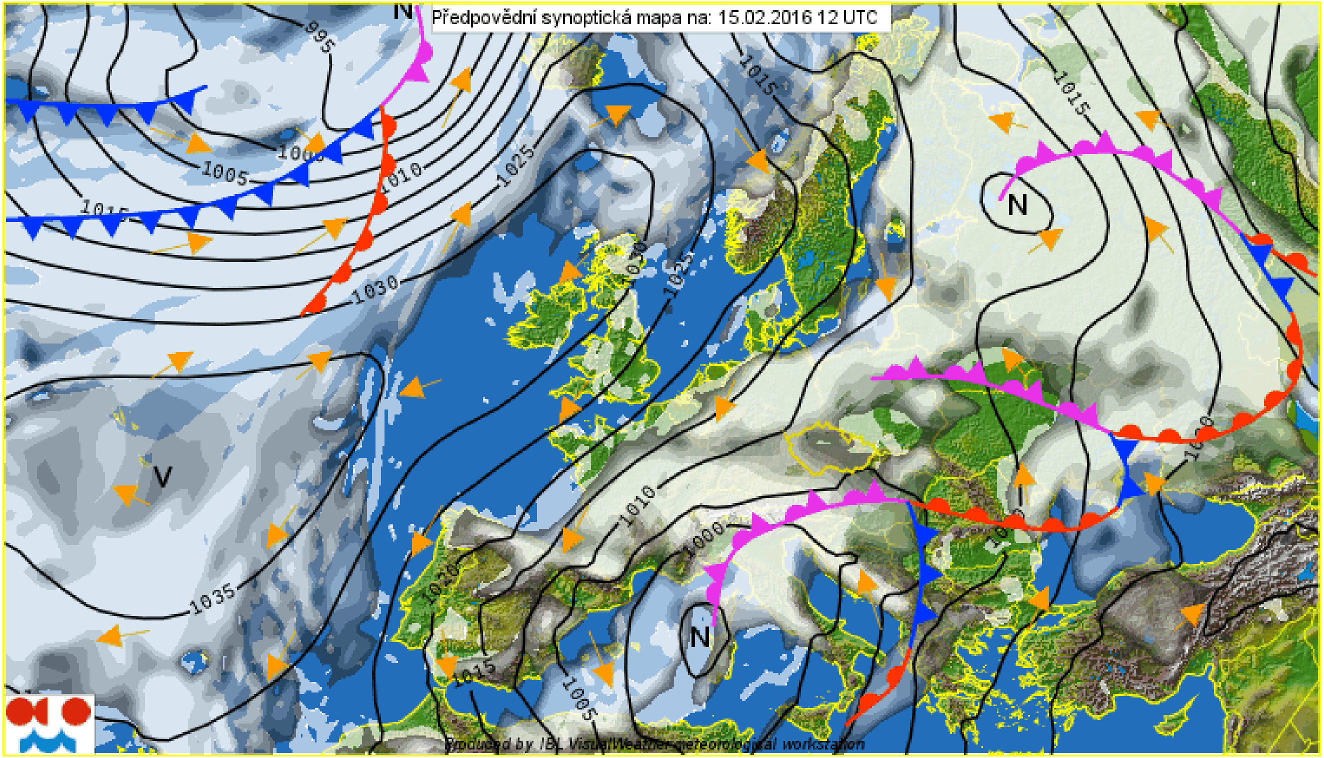
Logistické zobrazení

$$x_{n+1} = r x_n (1 - x_n)$$



https://www.wolframalpha.com/input/?i=logistic+system

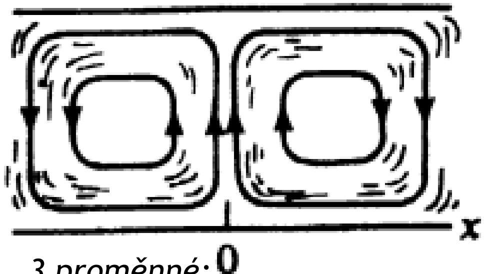
Meteorologie



Lorenzův systém

- jednoduchý model proudění v zemské atmosféře

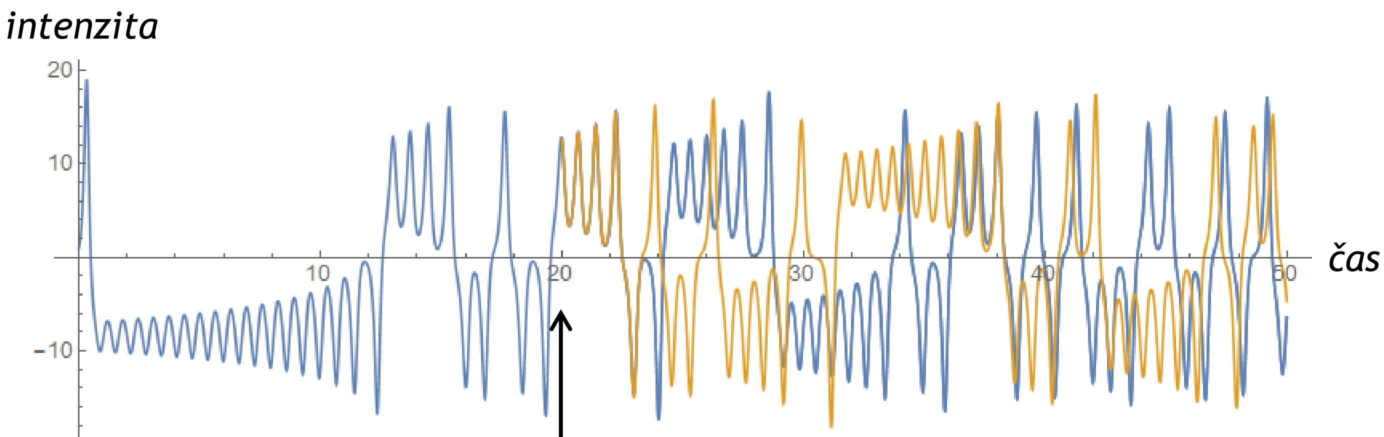
Bénardova buňka



3 proměnné:
- intenzita proudění
- rozdíl teplot mezi stoupavým a klesavým proudem
- odchylka teplot na svislém řezu od lineárního průběhu

Příběh:

Lorenz počítal na počítači “předpověď počasí” pomocí svých rovnic.
Počítač počítal na 6 platných cifer (*I*=14,7139 m/s), ale na obrazovku vypisoval jen 3 platné cifry (*I*=14,7 m/s).



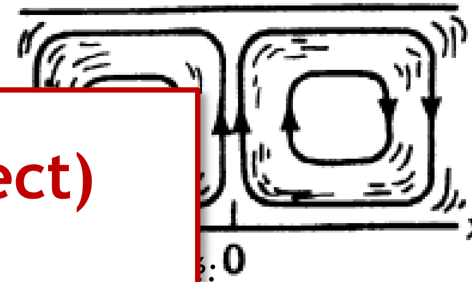
Lorenz si večer zapisuje mezivýsledek (*I*=14,7 m/s) a druhý den pouští výpočet od tohoto místa.
Po krátkém čase dostává **kvalitativně** odlišný průběh počasí.

1963: Jedno mávnutí křídel **racka** zásadně ovlivní budoucí průběh počasí.

1972: Může mávnutí křídel **motýla** v Brazílii způsobit tornádo v Texasu?

Lorenzův systém

Bénardova buňka



ξ: 0

...a proudění

...eplot mezi stoupavým ...ým proudem

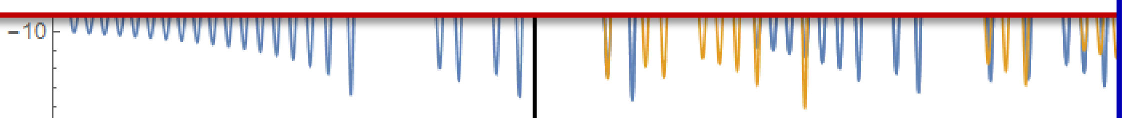
...a teplot na svislém ... lineárního průběhu

Efekt motýlích křídel (The butterfly effect)

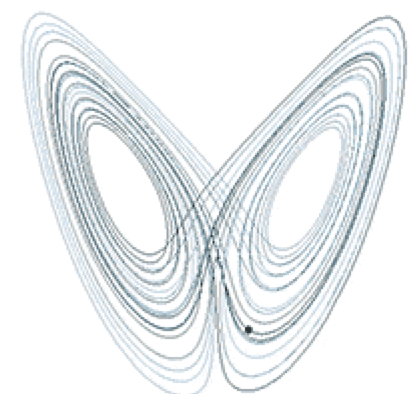
metafora fyzikálního chaosu

„Motýl se svou křehkostí a slabostí se přirozeně hodí jako symbol toho, že malé může ovlivnit velké.“

- citlivá závislost na počátečních pod...
- citlivá závislost k nepatrným poruc...



Řešení rovnic ve tvaru **podivného atraktoru** (fraktální dimenze d=2,04)



(připomíná motýlí křídla)

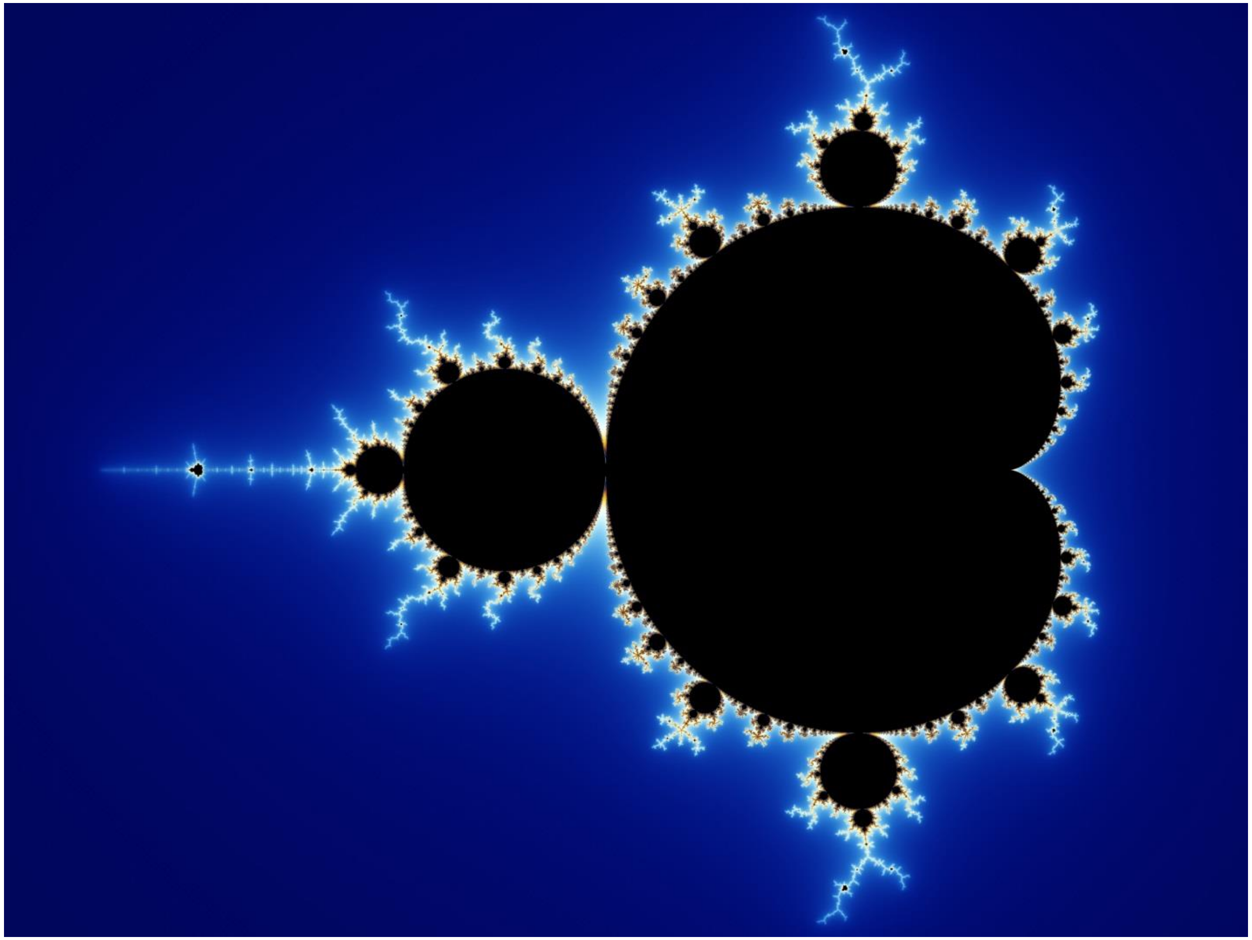
Lorenz si večer zapisuje meziv...
a druhý den pouští výpočet od ...
Po krátkém čase dostává **kvalit...**

1963: Jedno mávnutí křídel **racka** zásadně ovlivní budou...

1972: Může mávnutí křídel **motýla** v Brazílii způsobit to...

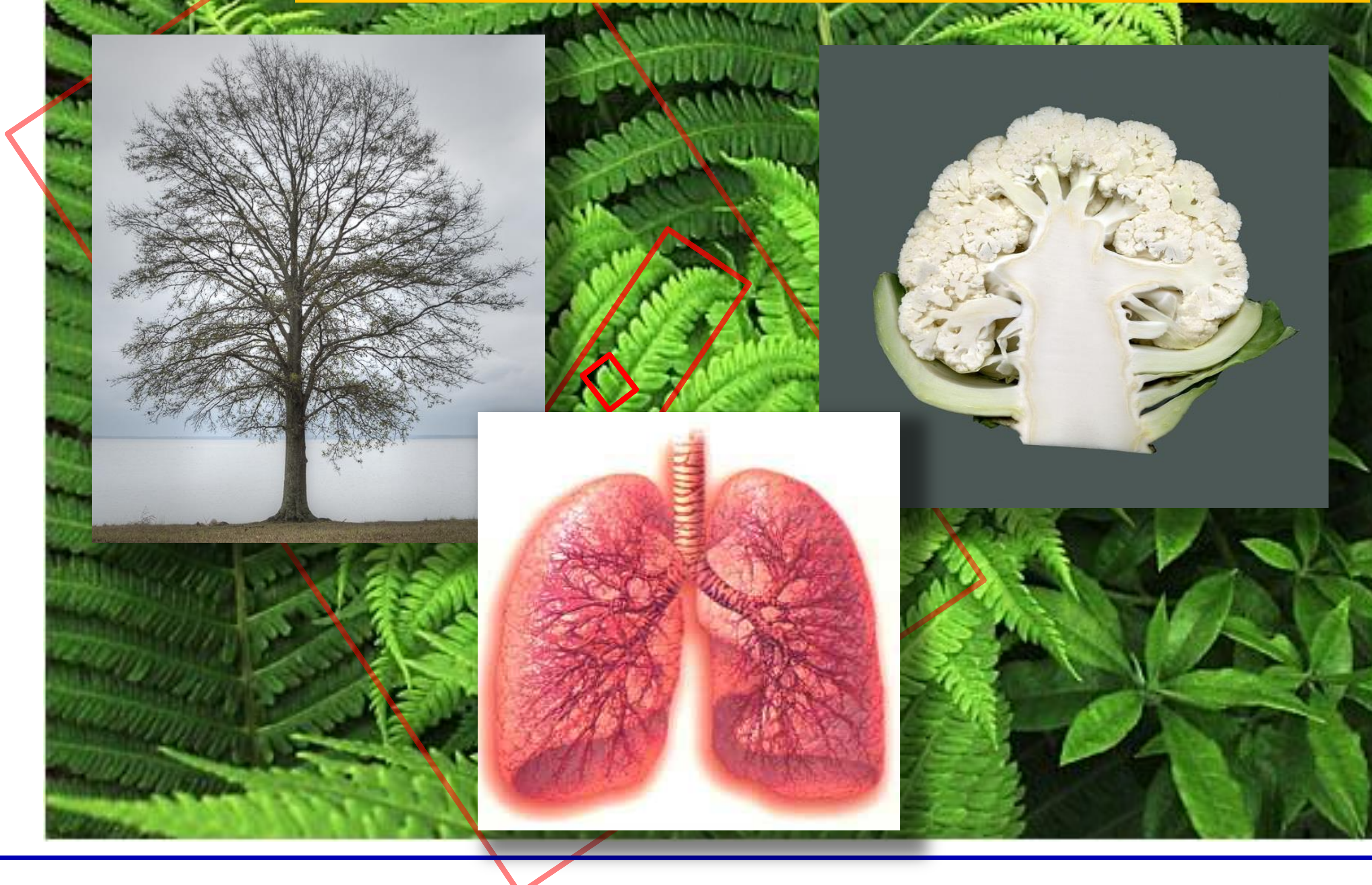
Edward N. Lorenz (1963) – *Deterministic nonperiodic flow*, J. Atmos. Sci. **20**, 130

Fraktály



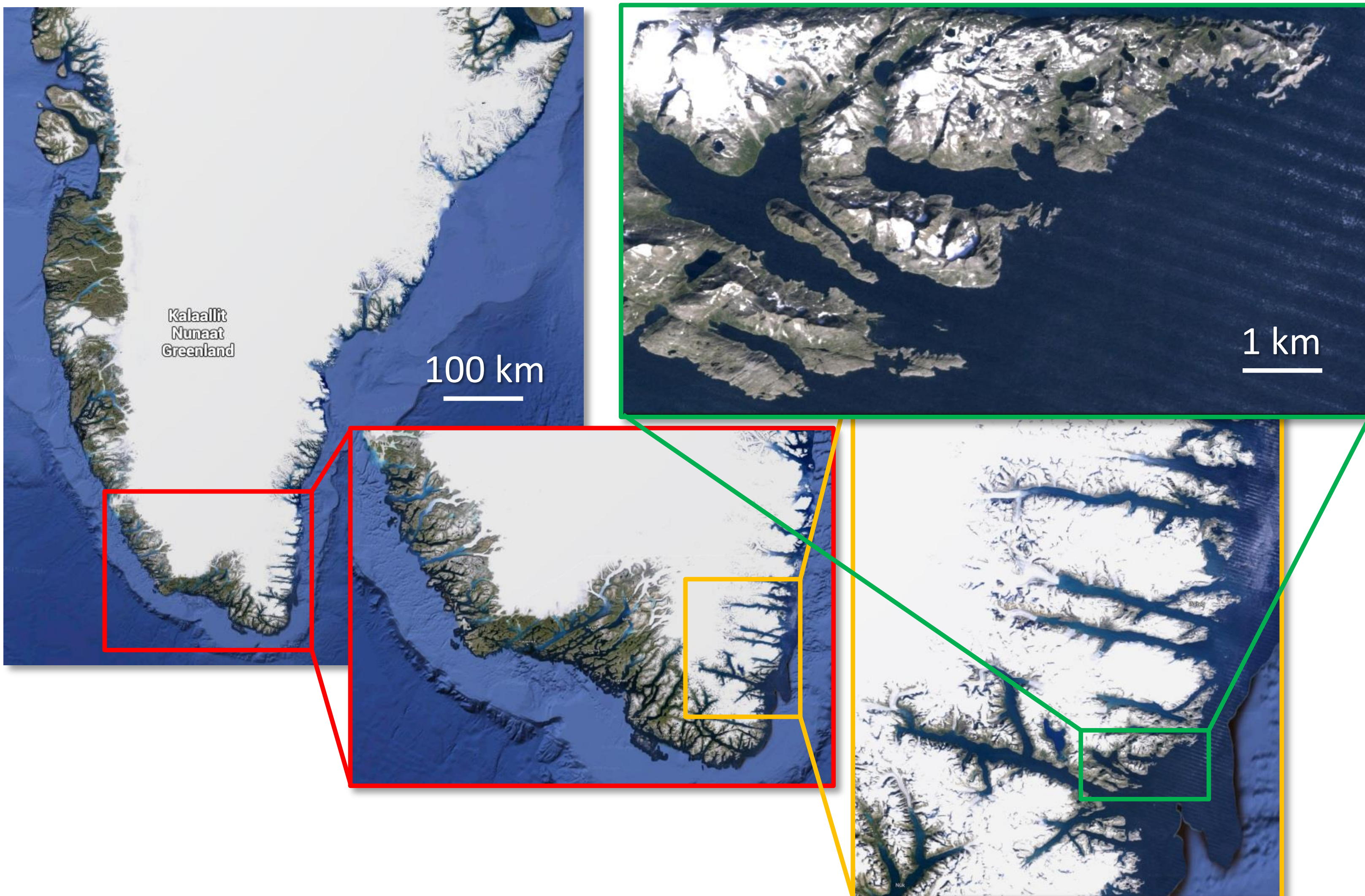
Fraktální struktura

- **soběpodobnost -** část vypadá stejně jako celek
- obecná vlastnost mnoha **přírodních objektů**



Fraktální struktura

Délka mořského pobřeží



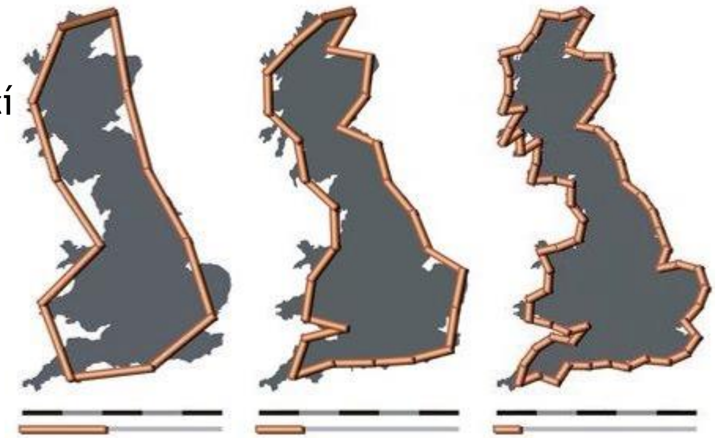
Fraktální (neceločíselná) dimenze

Délka mořského pobřeží (Velká Británie)

1950 – Lewis F. Richardson studuje korelaci mezi tendencí států začít válku a délkou jejich společné hranice.

Zjišťuje, že délky hranic, které uvádějí různé zdroje, se výrazně liší. Dnes pro Velkou Británii najdeme:

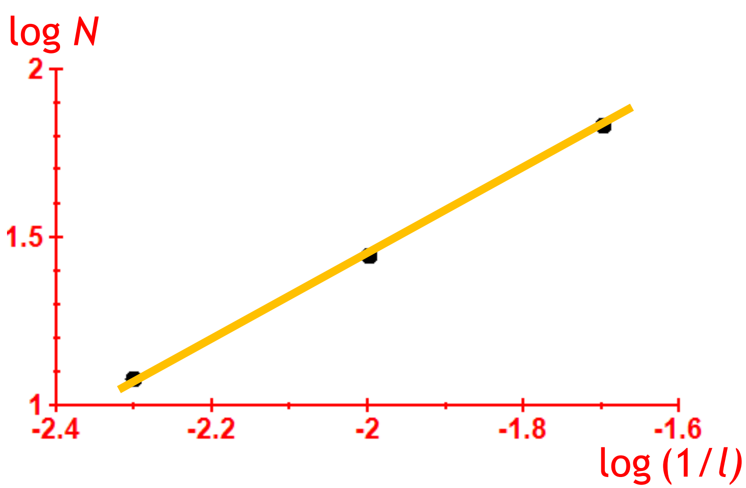
- Ordance Survey: 17 820 km
- Coastal Guide Europe: 18 838 km
- CIA World Factbook: 12 429 km (zahrnuje i Severní Skotsko)



Délka měřítka *l*:	200 km	100 km	50 km
Počet přiložení *N*:	12	28	68
Naměřená délka pobřeží:	2400 km	2800 km	3400 km

$$N = \frac{1}{l^d}$$

$$\log N = d \log \frac{1}{l}$$



sklon přímky: **fraktální dimenze *d*** ≈ 1,25

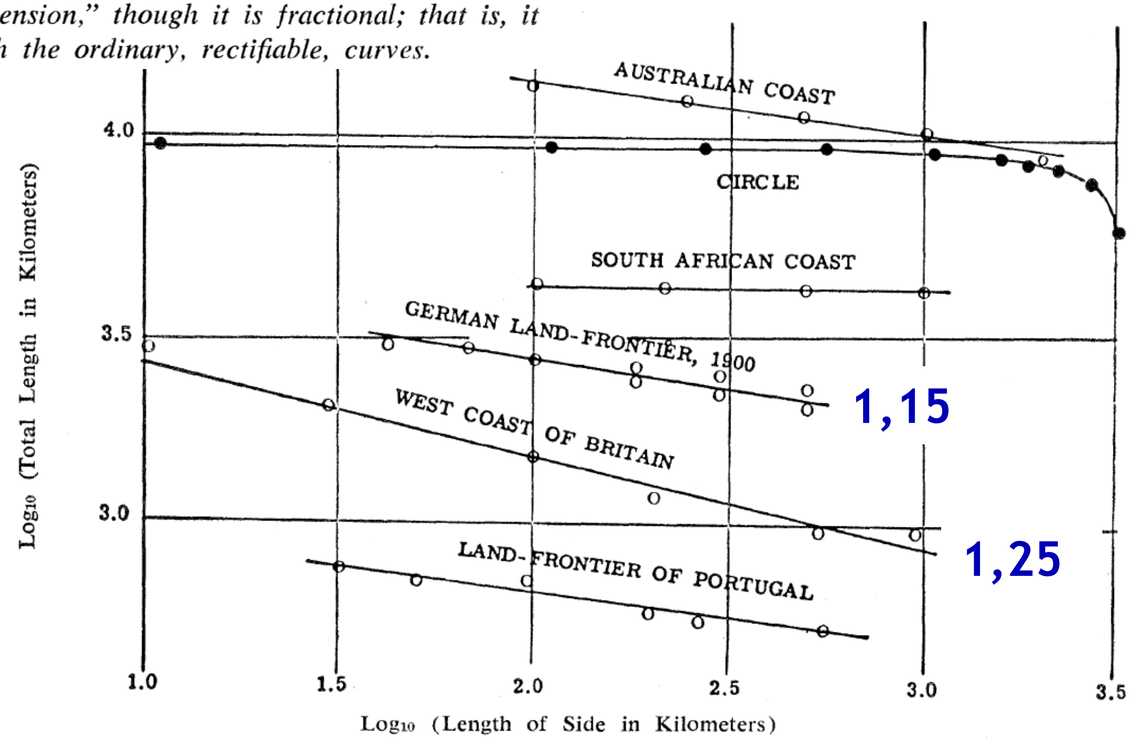
Benoît Mandelbrot (1967) – *How long is the coast of Britain? Statistical self-similarity and fractional dimension* (Science **156**, 636)

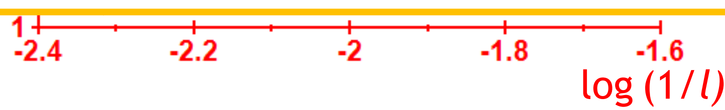
Fraktální (neceločíselná) dimenze

Délka mořského pobřeží (Velká Británie)

1950 – Lewis F. Richardson studuje korelaci mezi tendencí

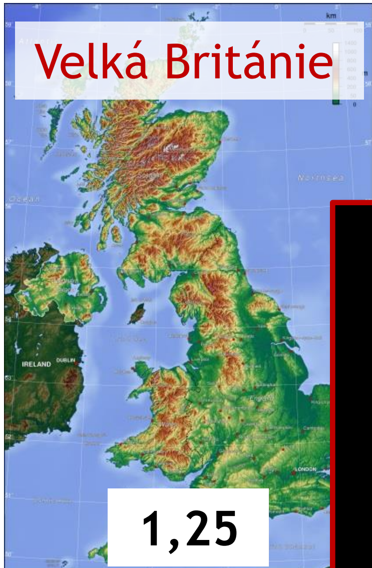
Abstract. *Geographical curves are so involved in their detail that their lengths are often infinite or, rather, undefinable. However, many are statistically "self-similar," meaning that each portion can be considered a reduced-scale image of the whole. In that case, the degree of complication can be described by a quantity* D *that has many properties of a "dimension," though it is fractional; that is, it exceeds the value unity associated with the ordinary, rectifiable, curves.*

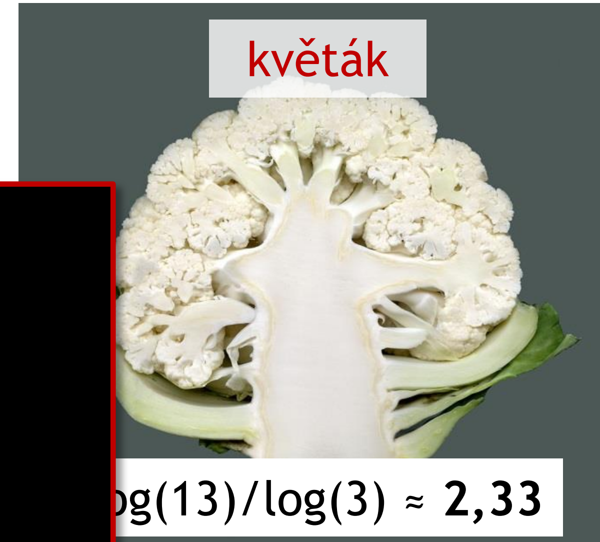


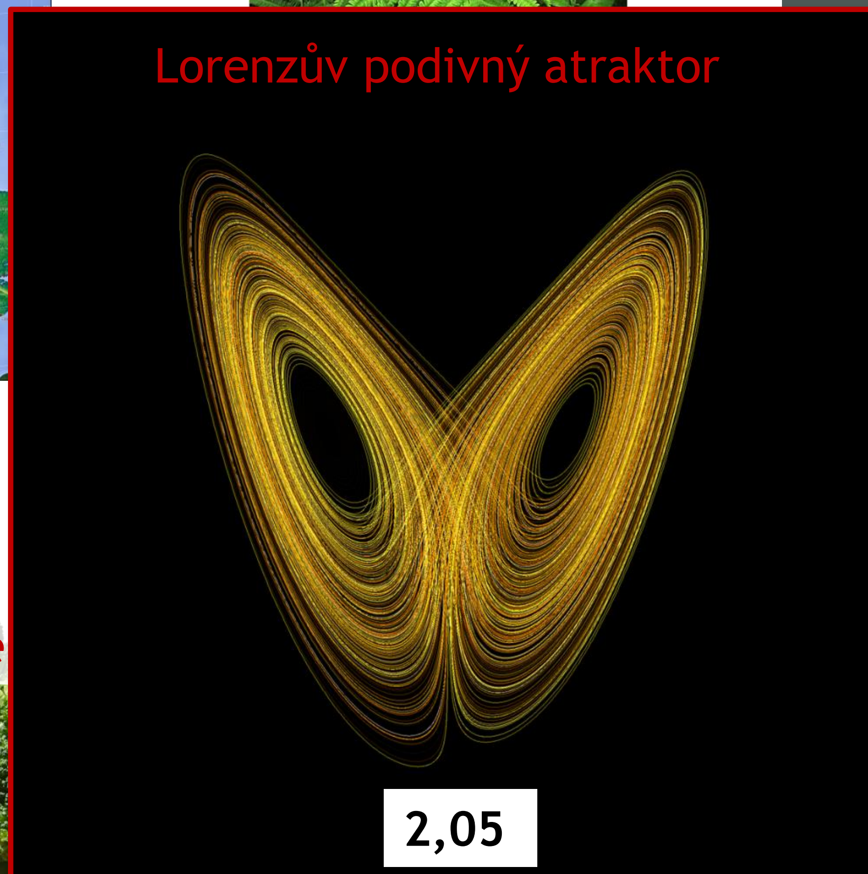


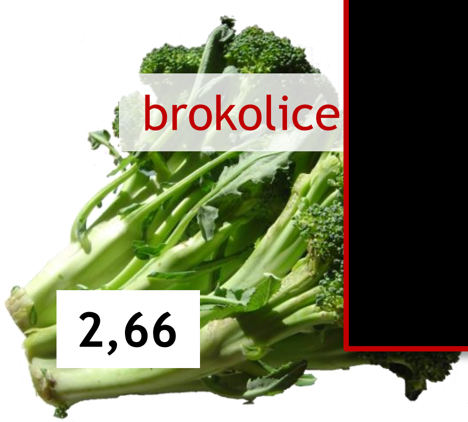
Benoît Mandelbrot (1967) – *How long is the coast of Britain? Statistical self-similarity and fractional dimension* (Science **156**, 636)

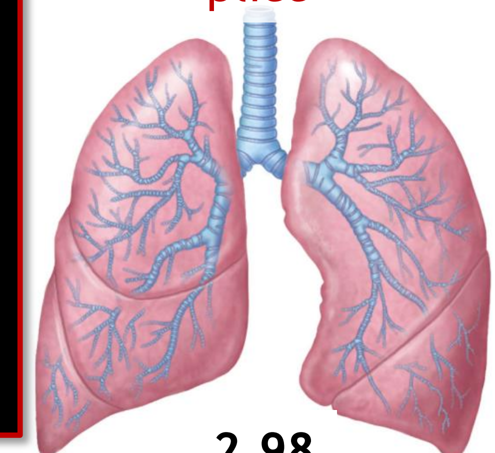
Fraktální dimenze - příklady











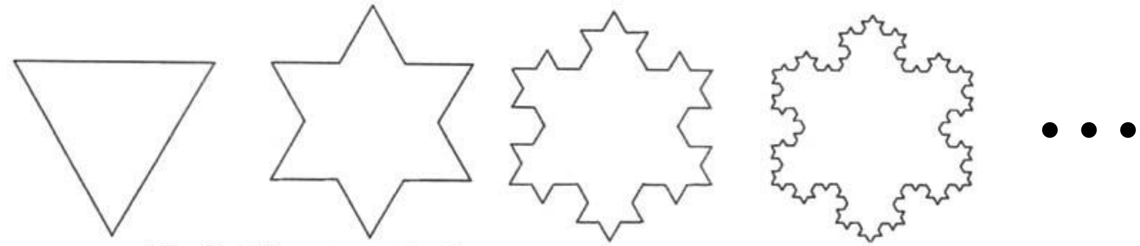
Umělé (syntetické) fraktály

Kochova křivka:

(Helge von Koch, 1904)

- fraktální dimenze

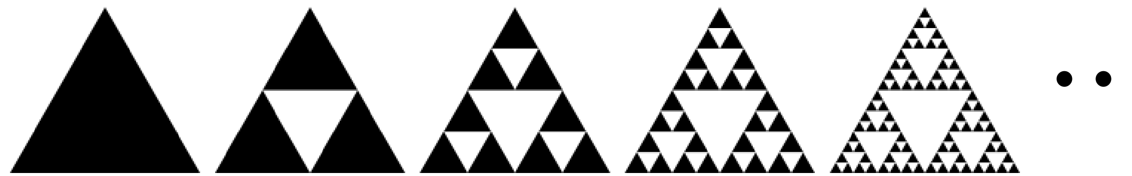
$$d = \frac{\log 4}{\log 3} \approx 1.26$$



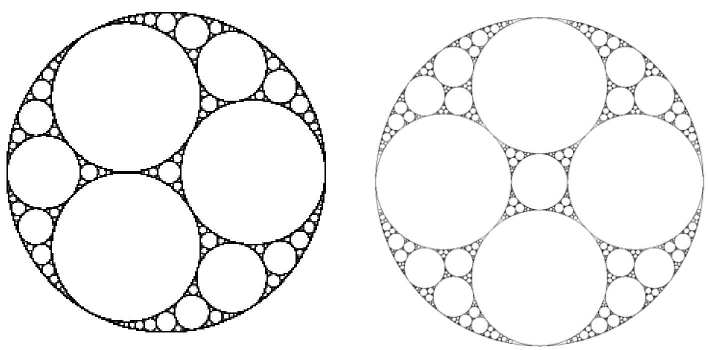
Sierpińského trojúhelník:

(Wacław Sierpińsky, 1915)

$$d = \frac{\log 3}{\log 2} \approx 1.59$$



Apolóniovy kružnice:



-fraktální dimenze
(závisí na typu kružnice)

$$d \approx 1.3$$

... a další a další

Mandelbrotova množina

Množina všech komplexních čísel *c*,
pro která je posloupnost

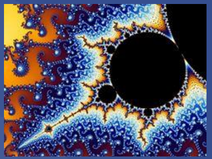
$$z_{n+1} = z_n^2 + c$$

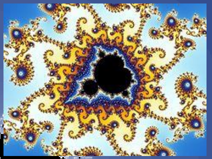
omezená

Animace na YouTube: https://www.youtube.com/watch?v=PD2XgQOyCCk

Mandelbrotova množina

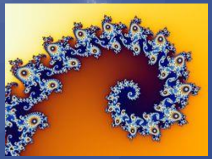
- 1978 - Robert W. Brooks a Peter Matelski ji definují a načrtávají její tvar
- fraktální dimenze hranice ***d*=2**





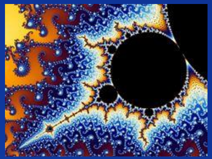
Benoît Mandelbrot

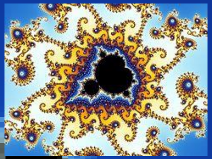
- 1975 zavádí označení **fraktál**
- 1980 poprvé vykresluje na počítači Mandelbrotovu množinu



Mandelbrotova množina

- 1978 - Robert W. Brooks a Peter Matelski ji definují a načrtávají její tvar
- fraktální dimenze hranice ***d*=2**



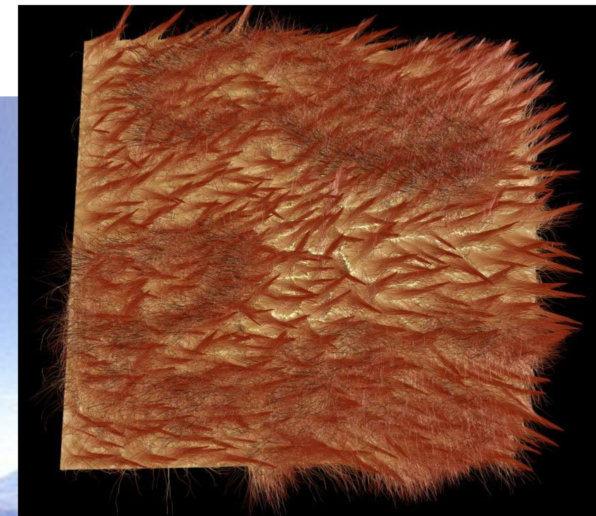


Benoît Mandelbrot

- 1975 zavádí označení **fraktál**
- 1980 poprvé vykresluje na počítači Mandelbrotovu množinu

Využití fraktální struktury - počítačová grafika

- generování náhodné struktury s danou fraktální dimenzí
- využití v počítačových hrách, ve filmu (*Star Trek II: The Wrath of Khan* - 1982)



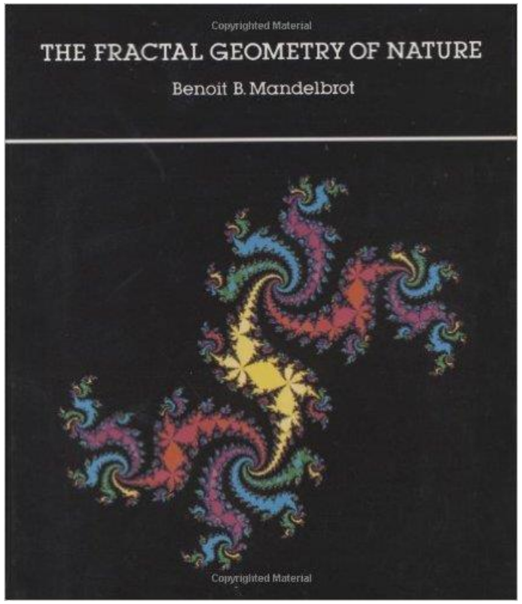
Edward Lorenz (1960)

Přítomnost jasně udává budoucnost, ale přibližná přítomnost neudává budoucnost ani přibližně.

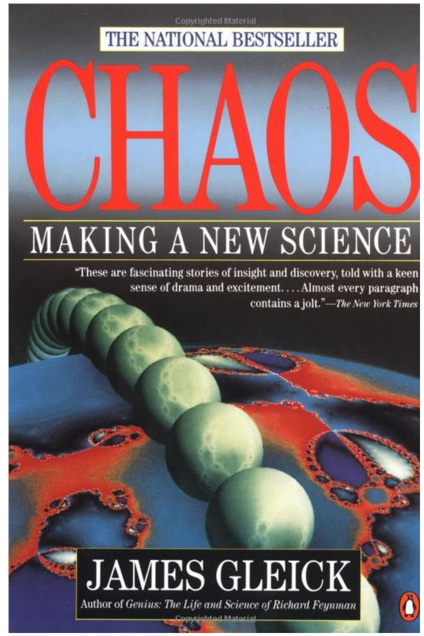
Robert May (1976)

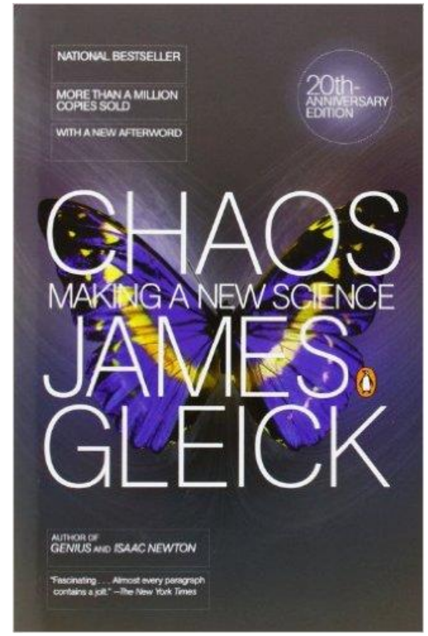
Nejen ve vědě, nýbrž i ve světě politiky a ekonomie bychom na tom byli lépe, kdybychom si více uvědomovali, že to, že je systém jednoduchý, neznamená, že se musí jednoduše chovat.

Literatura



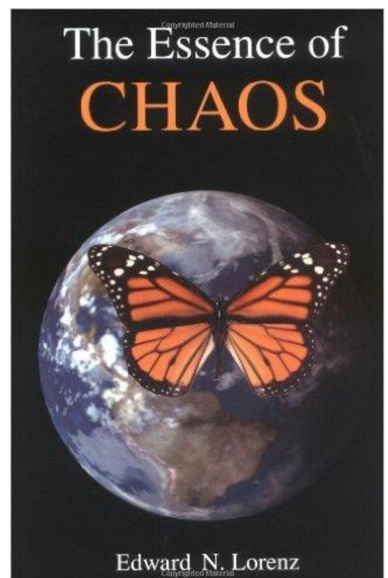
B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature*, 1982





J. Gleick, *Chaos: Making a New Science*, 1988

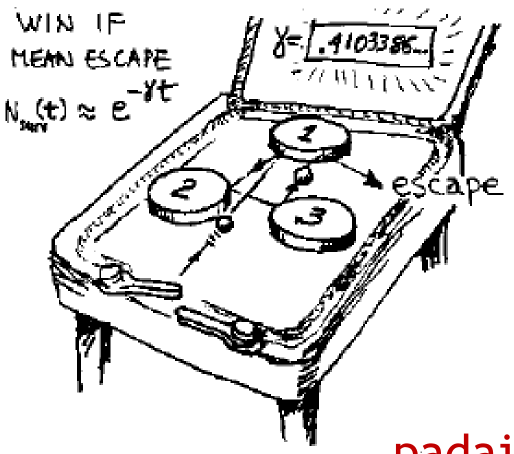
B. Mandelbrot, *Fraktály: Tvar, náhoda a dimenze*, 2003



E. Lorenz, *The Essence of Chaos*, 1995

Další příklady chaotických systémů

hra pinball



vlny na pobřeží (turbulence)

padající list

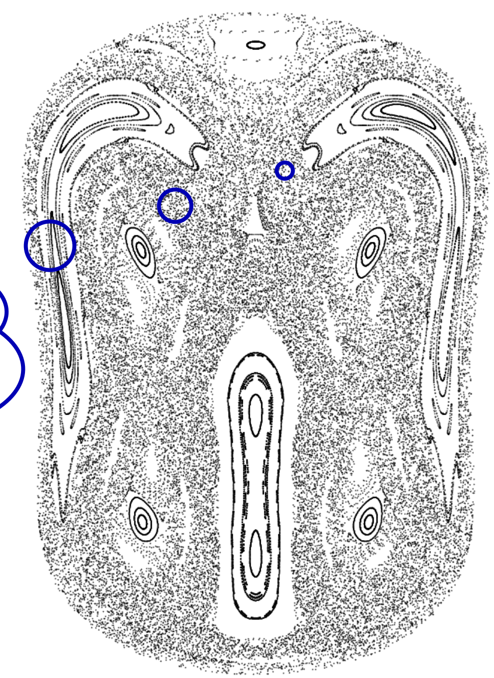
třepotání vlajky

Závěr

Edward Lorenz (1960): Přítomnost jasně udává budoucnost,
ale přibližná přítomnost neudává budoucnost ani přibližně.

Klasická fyzika je deterministická, ale jelikož je nemožné mít k dispozici absolutně přesné polohy a hybnosti všech těles a absolutně přesnou výpočetní sílu, budoucnost nelze předpovědět. Předpověditelnost je omezena Ljapunovovým časem.

Deterministický chaos



Na co se nedostalo:

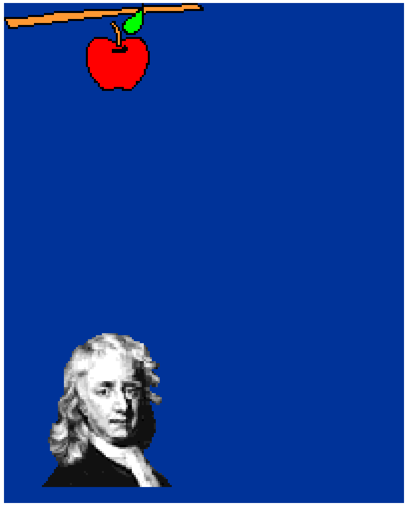
- heteroklinická změť
- chaos v kvantové fyzice
- komplexní systémy
- celulární automaty
- Benfordův zákon
- časové řady a 1/f šum
- algoritmická komplexita

DÍKY ZA POZORNOST

Fyzika 1. druhu - **kódování**

Pozorováním světa a prováděním experimentů získáváme jednoduchá pravidla, kterými se svět řídí

- **(přírodní) zákony**
- **rovnice**



Newton (1680)

Fyzika 2. druhu - **dekódování**

Zabýváme se detailně důsledky pravidel a zákonů

- Co se stane, když zákony **upravíme** nebo pozměníme?
- Jaká jsou všechna **možná řešení** rovnic (tedy i ta, která bezprostředně nepozorujeme)?

$$F_g = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \Rightarrow ???$$